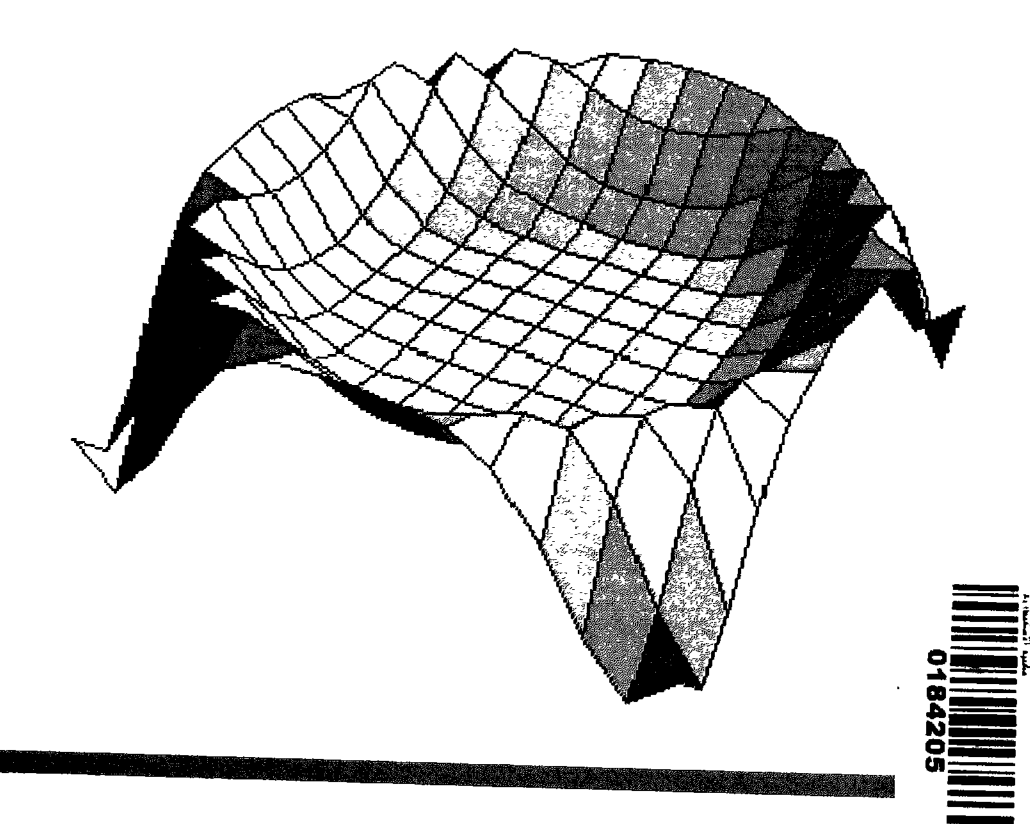
ماثيماتيكا

الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

دكتور
رأفت رياض رزق الله



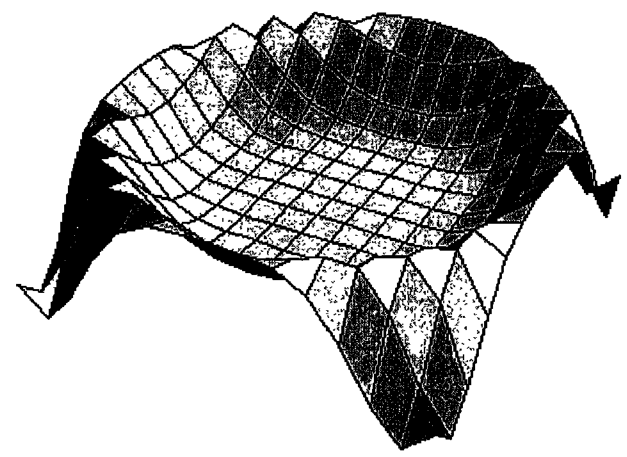
Bibliotheca Alexandrina
0184205



المكتبة الأكاديمية

ماثيماتيكا
الرياضيات باستخدام الكومبيوتر

ماثيماتيكا
الرياضيات باستخدام الكومبيوتر



دكتور/ رأفت رياض رزق الله

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربية - جامعة عين شمس



الناشر

المكتبة الأكاديمية

٢٠٠٠

حقوق النشر

الطبعة الأولى : حقوق الطبع والنشر © ٢٠٠٠ جميع الحقوق محفوظة للناشر :

المكتبة الأكاديمية

١٢١ شارع التحرير – الدقى – القاهرة

تليفون : ٣٤٨٥٢٨٢ / ٣٤٩١٨٩٠

فاكس : ٣٤٩١٨٩٠ – ٢٠٢

لا يجوز استنساخ أى جزء من هذا الكتاب بأى طريقة كانت

إلا بعد الحصول على تصريح كتابى من الناشر .

برنامج ماثيماتيكا ***Mathematica*** من تصميم
Stephen Wolfram ويعتبر البرنامج علامة
مسجلة من إنتاج شركة ***Wolfram Research***

مقدمة

برنامج ماثيماتيكا هو نظام عام لعمل الحسـابات العلميـة ويسـتخدمه الآن العديد من الباحثين فى مجال الرياضيات والهندسة فى معظم أنحاء العـالم وتطبيقـات برنامج ماثيماتيكا تدخل فى العديد من العلوم كما يستخدم كلغة برمجة ولقد ظهـر برنامج ماثيماتيكا فى عام **1988** وقام بتصميمه **Stephen Wolfram** الذى قـام بتأسيس شركة **Wolfram Research** حيث تم تطوير برنامج ماثيماتيكا وظهر له إصدارات على العديد من نظم الكومبيوتر مثل نظام التشغيل **DOS** ونظام النوافـذ **Windows** وماكينتوش **Mackintosh** وكيفية التعامل مع الأوامر المختلفة مـع التوضيح بالأمثلة المتعددة فى فروع الرياضيات المختلفة وقد تم تقسـيم الكتـاب إلى سبعة أبواب كالآتى :

الباب الأول : ما هو ماثيماتيكا؟

الباب الثانى : ماثيماتيكا والحسابات العددية

الباب الثالث : ماثيماتيكا والجبر

الباب الرابع : ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

الباب الخامس : ماثيماتيكا ورسم الدوال

الباب السادس : ماثيماتيكا والتحليل العددى

الباب السابع : البرمجة فى ماثيماتيكا

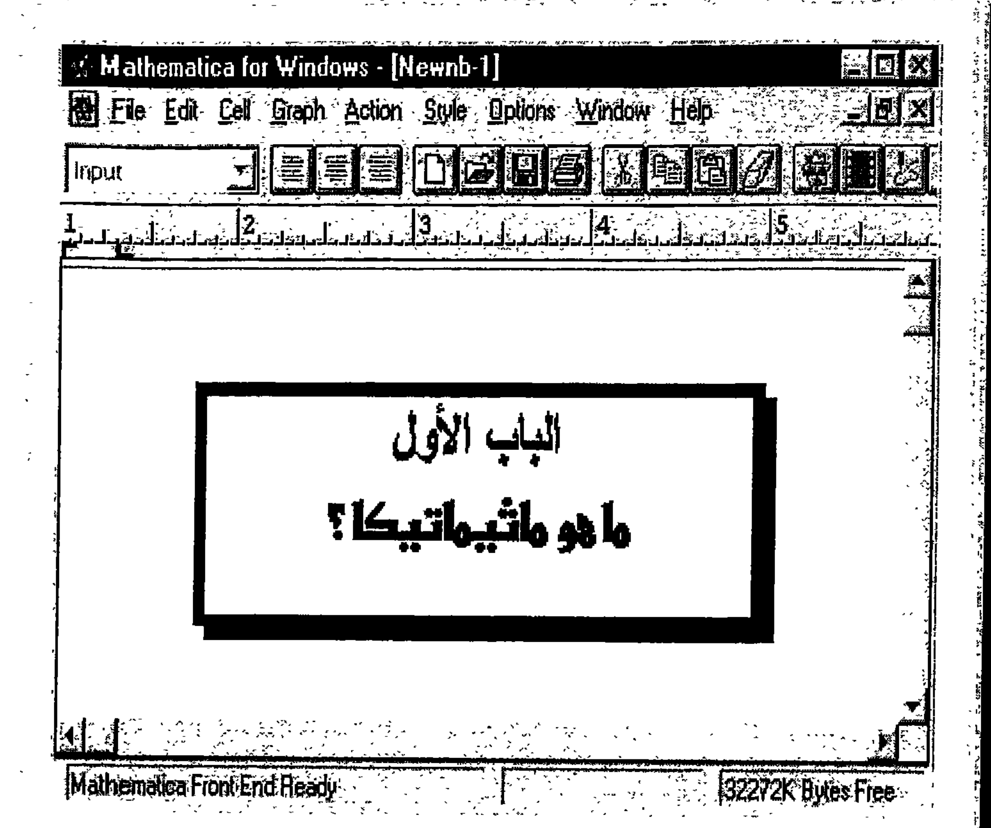
المحتويات

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows
٢ . القلب والواجهة في ماثيماتيكا
٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
٤ . التعبيرات في ماثيماتيكا

الباب الأول

ما هو ماثيماتيكا ؟
What is Mathematica ?

برنامج ماثيماتيكا هو نظام عام **General System** لعمل الحسابات والعمليات الرياضيــــة المختلفة وهو برنامج مفيـــد ومتعدد الأغراض ويخدم قطاعا كبيرا مـــن التخصصات العلميـــة المختلفة . وبرنـــامج ماثيماتيكـــا يقـــوم بـــأجراء العمليـــات الحســـابية العدديــة **Numerical Calculations** المتعارف عليها مثل الجمـــع والطرح والضرب والقسمة وحســـاب الأسس واللوغاريتمات والـــدوال المثلثيـــة والزائدية ســـواء للأعـــداد الحقيقيـــة **Real Numbers** أو الأعـــداد المركبـــة **Complex Numbers** وكذلك يقوم بأجراء العمليات الرياضية الرمزية **Symbolic** المتعارف عليها فى فروع كثيرة من الرياضيات مثل الجبر والتفاضل والتكامل والجبر الخطى والمعادلات التفاضلية والدوال الخاصة والتحليل العددى والاحتمالات والإحصاء والبرمجة الخطية ، كما أن ماثيماتيكا يقوم برسم الدوال ســـواء المباشرة أو البارامترية فى بعدين أو ثلاثة أبعاد بالإضافة الى إمكانات متقدمة فى الرسم البيانى وإنتاج وثائـــق رياضيـــة تتضمن النصوص والمعادلات والرموز الرياضية والرسومات معا وكذلك يمكن اســـتخدام ماثيماتيكا كلغة برمجة لكتابة برامج تحل مشكلات كبيرة يعجز عن حلهـــا أمـــر واحـــد وهذه البرامج لا تتعامل فقط مع الأعداد ولكن تتعامل أيضاً مع التعبيرات الرمزية ومـــع الأشكال المرسومة .

ولغة ماثيماتيكا تعتبر لغة عالية المستوى جــــدا Very High Level Language ويطلق عليها أيضا لغـــة الجيـــل الرابـــع Fourth Generation Language لأنها تفعل فى خطوة واحدة مـــا تفعله اللغات عالية المستوى (مثل بيســـك BASIC وفورتـــران FORTRAN وسى C وباسكال PASCAL وغيرها) فى عدة خطوات . ويوجد داخل برنامج ماثيماتيكا built - in اكـــثر من 1000 دالة تخدم فروع الرياضيات المختلفة .

وبرنامج ماثيماتيكا قام بتصميمـــه Stephen Wolfram وقـــامت شـــركة Wolfram Research بتقديـــــم الإصـــــدار الأول mathematica 2.0 فى عام ١٩٨٨ ثم ظهـــر الإصـــدار الثـــانى mathematica 2.1 والإصدار الثالث mathematica 2.2

وقبل أن نتعرف على استخدامات ماثيماتيكا سوف نعرض أولا كيفيـــة تشغيل برنامج ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows .

١ـ تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows

قدمت شركة مايكروسوفت برنامج النوافذ Microsoft Windows فى العديد من الإصدارات ويمكن من خلاله تشغيل عدة برامج فى وقت واحد وتبادل المعلومات بينهما وهذا الأسلوب يعرف بأسلوب تعدد المهام multitasking ويقوم برنامج النوافذ بتقسيم الشاشة الى مناطق تعرف بالنوافذ أو الإطارات وكل نافذة تطل على برنامج أو مجموعة من البرامج ولكل نافذة عنوان يكتب على قمة النافذة ويتم تشغيل البرامج من داخل النوافذ بأسلوب حدد الهدف الذى تختاره ثم أطلق point and shoot آي وجه المؤشر نحو البرنامج المطلوب تنفيذه ثم اضغط زر الفأرة الأيسر أو اضغط مفتاح الإدخال Enter . وبرنامج النوافذ مثل البرامج التطبيقية الأخرى يمكن تشغيله من محث نظام التشغيل فإذا تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة Hard Disk فإنه يمكن تشغيله مباشرة عن طريق كتابة win ثم نضغط على مفتاح الإدخال Enter وعند بدء تشغيل برنامج النوافذ فى الإصدار 3.1 سوف تظهر نافذة إدارة البرامج Program Manager مشابهة للشكل (١) الآتي

Mathematica			
Applications	Main	Arabic DOS Applications	Microsoft Office
Excel	Accessories	Games	StartUp

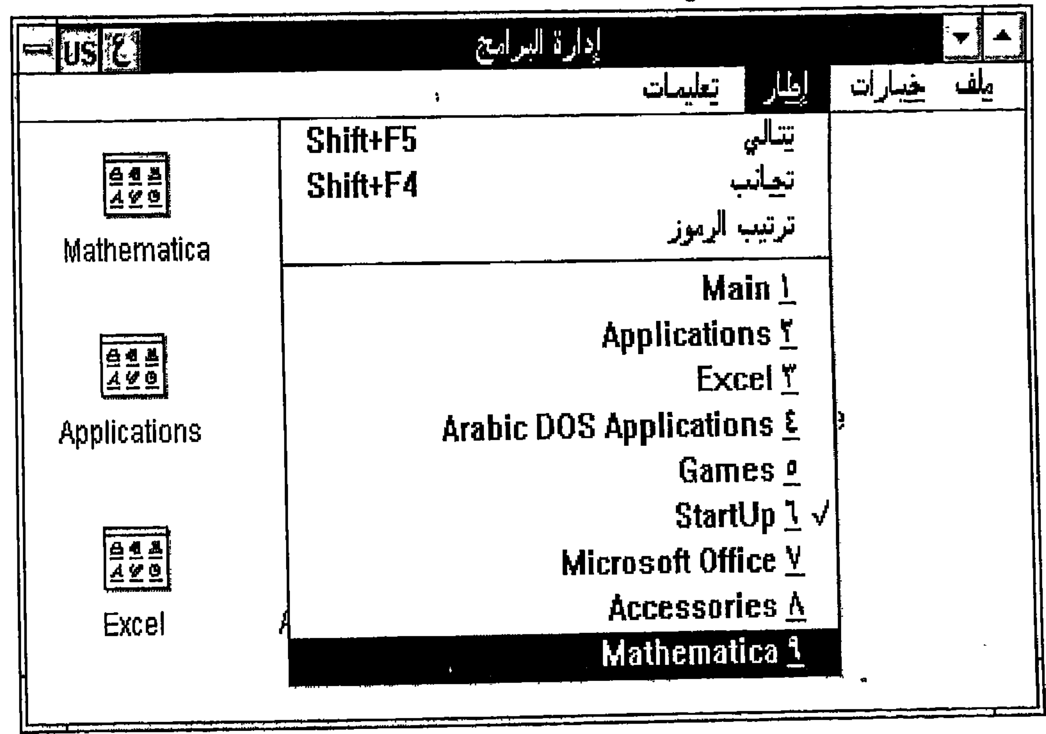
(نافذة: إدارة البرامج — القوائم: ملف، خيارات، إطار، تعليمات)

شكل (١)

وهناك عدة طرق لبدء تشــــغيل برنامج ماثيماتيكا

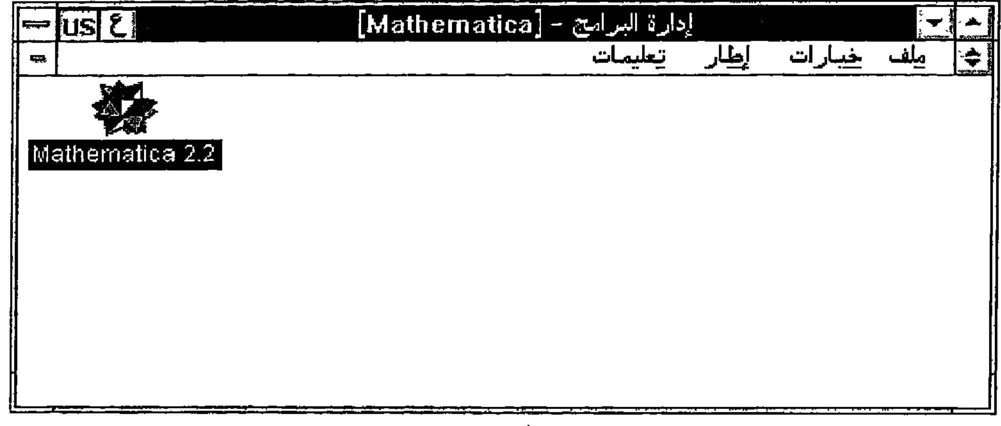
- يمكن بدا تشـــــــغيله من مدير البرامج **Program Manager** كما نفعل مـــع معظم تطبيقات برنامج النوافذ **Windows** .
- كما يمكن تشغيله من مدير الملفات **File Manager** الموجود بالنافذة الرئيسية **Main** وذلك بأن ننقر فوق أسم الملف **ma.exe** .

وفى الإصدار الأول **mathematica 2.0** كان يتم تشغيل برنامج ماثيماتيكا مـــن بيئـــة نظام التشغيل **Dos** مباشرة ، وبفرض أن برنامج ماثيماتيكا **mathematica 2.2** قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكومبيوتر وذلك من خلال برنامج النوافذ **Windows** وانـــه موجود فى إطار من إطارات برنامج النوافذ تحت أسم **Mathematica** ويجعل هذا الإطار هو الإطار النشط وذلك عن طريق اختيار البرنامج **Mathematica** من قائمة إطار **Window** فى إدارة البرامج كما هو موضح فى الشكل (٢)



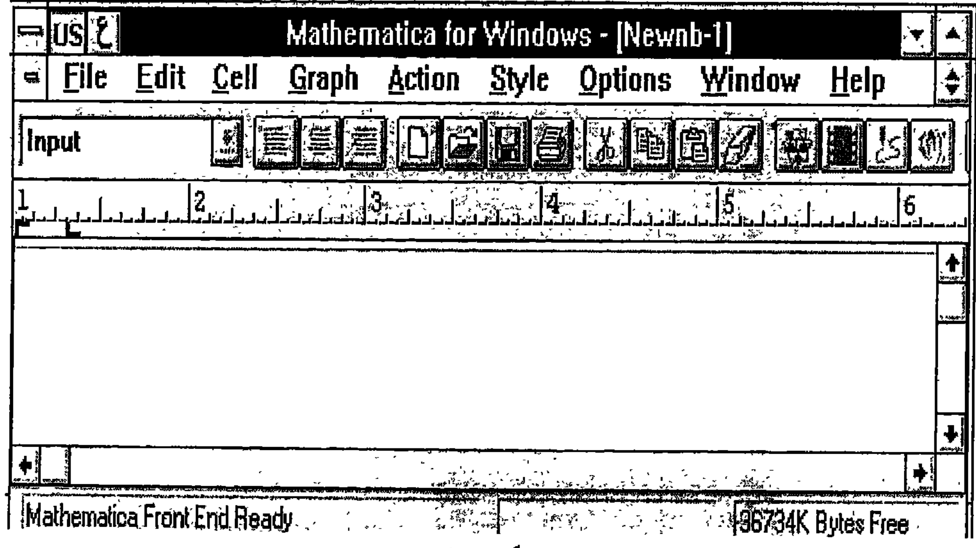
شــــــكل (٢)

وبعد الضغط على زر الفأرة يتم الدخول الى النافذة الخاصة ببرنامج ماثيماتيكا وسوف تظهر شاشة مثل الموضحة فى شكل (٣)



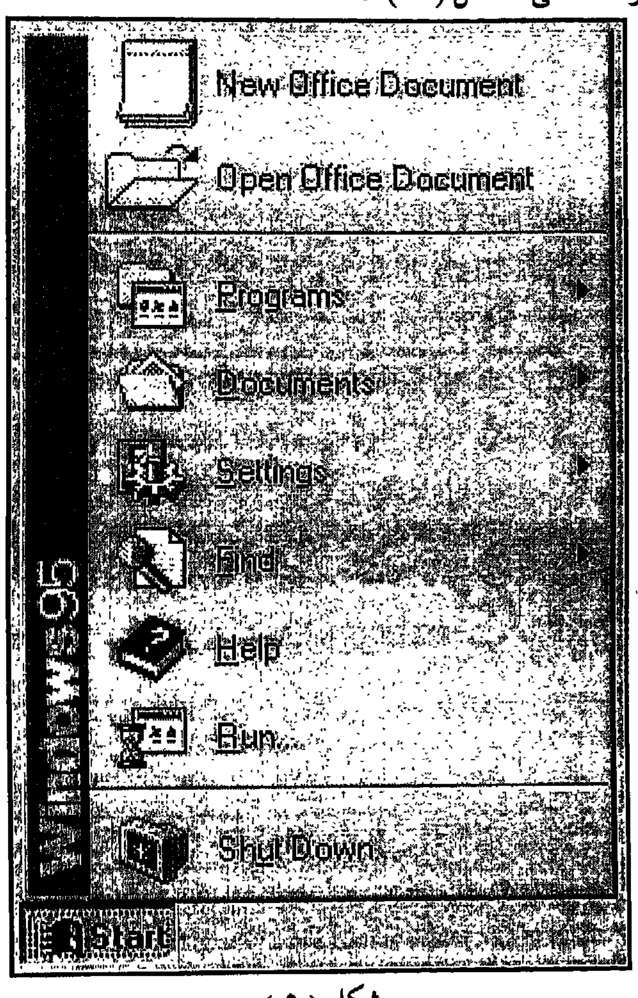
شكل (٣)

حيث تظهر أيقونة الرمز الخاص ببرنامج ماثيماتيكا وعن طريق النقر مرتين بسرعة على هذا الرمز بواسطة الفارة mouse بعد لحظات تظهر الشاشة المبينة فى شكل (٤)



شكل (٤)

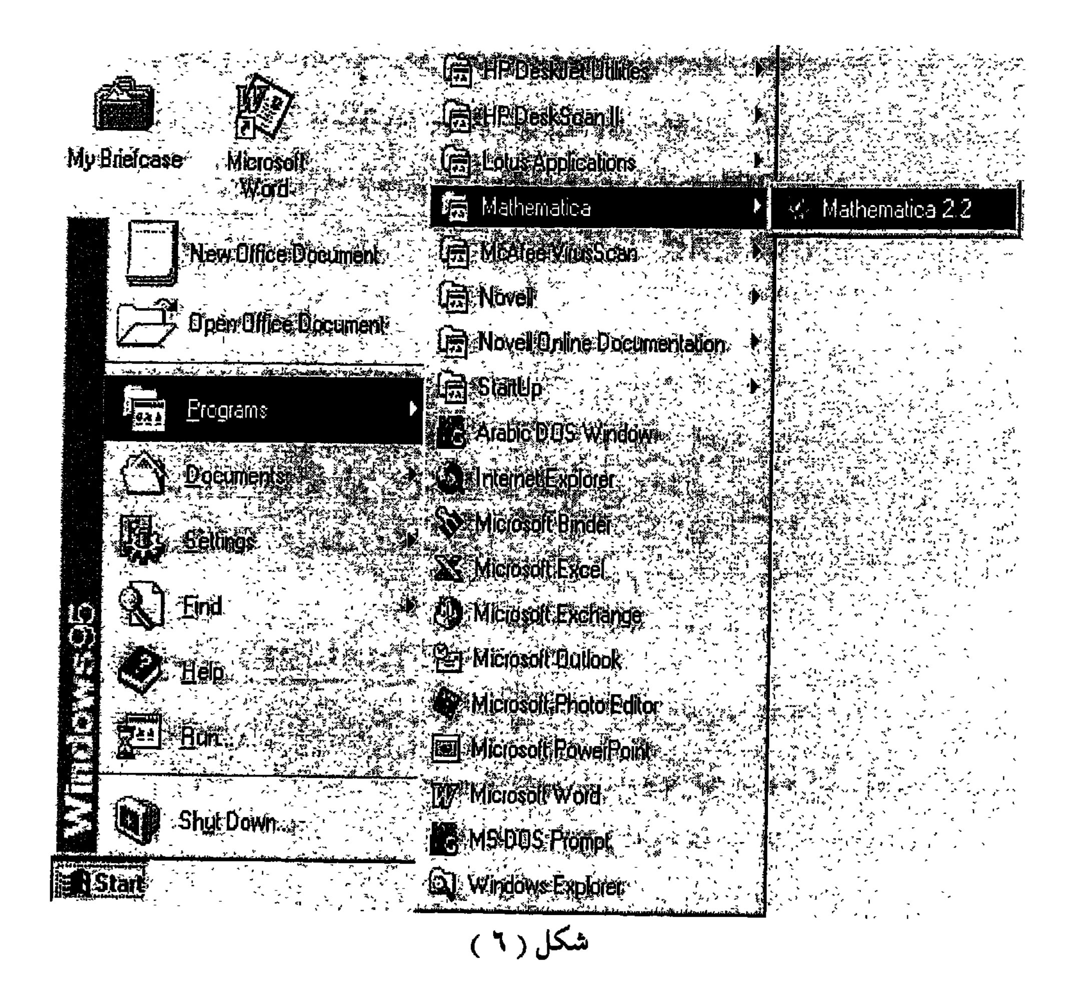
وإذا كان برنامج النوافذ المستخدم **Windows 95** فانه عند الضغط على المربع Start الموجود فى اسفل الشاشة من جهة اليسار فسوف تظهر قائمة كالموضحة فى الشكل (٥) .



شكل (٥)

وبتحريك مؤشر الفارة الى الاختيار **Programs** ثم الضغط على زر الفارة تظهر قائمة أخرى مثل الموضحة بالشكل (٦) ثم نضغط بزر الفارة على البرنامج Mathematica فتظهر الأيقونة الخاصة ببرنامج ماثيماتيكا Mathematica 2.2 وبالضغط عليها

يبدءا تحميل برنامج ماثيماتيكا وتظهر شاشة كالمبينة في شكل (٤) ويتم ذلك علـــى اعتبـــار أن برنامج ماثيماتيكا mathematica 2.2 قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكومبيوتر .



شكل (٦)

وسوف نتعرف الآن على تركيب ماثيماتيكا كبرنامج ، حيث تتيح معرفة هذا التركيب فهما اكثر لما يحدث أثناء استخدامنا لبرنامج ماثيماتيكا على الكومبيوتر .

٢. القلب والواجهة فى ماثيماتيكا
Kernel and Front End in Mathematica

يتكون برنامج ماثيماتيكا من جزئين أساسيين هما

- القلب **Kernel**
- والواجهة **Front End**

أما القلب Kernel

فهو الجزء الذي يقوم بتنفيذ العمليات الرياضية المطلوبة ، ويتم تحميل القلب عن طريق كتابة آي عملية حسابية بسيطة فى بداية التشغيل مثل ١+١ ثم نضغط على زر التنفيذ وهو مفتاح **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح ، ويمكن تحميل القلب مع بداية تشغيل ماثيماتيكا عن طريق اختيار **Option** فى قائمة الاختيارات

وأما الواجهة Front End

فهي حلقة الوصل بين المستخدم **User** والقلب **Kernel** وعندما يعطى المستخدم أمر ما لماثيماتيكا لتنفيذه فانه فى الحقيقة يعطيه للواجهة التي تقوم بترجمته الى شفرات خاصة يفهمها القلب ، وعندما ينفذ القلب هذا الأمر فانه يخرج النتائج على هيئة شفرات تقوم الواجهة بترجمتها الى أرقام أو حروف أو رسومات أو ألوان حسب نتائج الأوامر المعطاة ويتم عرضها على الشاشة بطريقة يمكن فهمها والاستفادة منها وشكل(٧) يوضح العلاقة بين المستخدم والواجهة والقلب .

		Front End	⟶	Kernel
User	⟵	الواجهة	⟵	القلب

شكل (٧)

وبرنامج ماثيماتيكا يوجد له إصدارات على العديد من نظم الكومبيوتر مثل نظام التشغيل دوس DOS ونظام وندوز Windows وماكينتوش Makintosh ونظام يونيكس Unix ، وفي كل هذه النظم يوجد نفس القلب أما الواجهة فتختلف من نظام الى آخر بمعنى أن ماثيماتيكا على كل نظام من هذه النظم قادر على أداء نفس القدر من العمليات الرياضية وإخراج نفس النتائج ، والشكل (٤) يمثل الواجهة فى نظام وندوز .

وطريقة إدخال الأوامر فى ماثيماتيكا يكون بظهور المحث Prompt على الصورة

In[n] :=

حيث يقوم المستخدم بكتابة المدخلات أو الأمر المطلوب تنفيذه وبعد الضغط على زر التنفيذ **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح يقوم ماثيماتيكا بطباعة الناتج Output بجانب المحث

Out[n]=

حيث n يمثل رقم المدخل لان ماثيماتيكا يقوم بترقيم كل مدخلا ته فى ترتيب تصاعدى . بالنظر الى واجهة ماثيماتيكا فى شكل (٤) نرى أن الشاشة تنقسم الى ثلاثة أجزاء أساسية الجزء العلوى به أربعة صفوف

الصف الأول من أعلى عبارة عن الشريط الموضح

| US | ع | Mathematica for Windows - [Newnb-1] |

ويحتوى على الآتي :

– فى الركن الأيسر يوجد مربع صغير ▭ يسمى قائمة التحكم Control Panel وهو موجود فى جميع تطبيقات النوافذ وبتحريك مؤشر الفارة نحو هذا المربع ثم الضغط على زر الفارة تفتح قائمة التحكم الآتية

Restore	
Move	
Maximize	
Close	Alt+F4
System...	
Switch To...	Ctrl+Esc

ومن خلال هذه القائمة يمكن نقل Move أو تكبير Maximize أو تصغير Minimize نافذة البرنامج أو غلق النافذة Close والخروج من البرنامج أو التبديل الى برنامج آخر Switch To

- المربع US بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة الإنجليزية

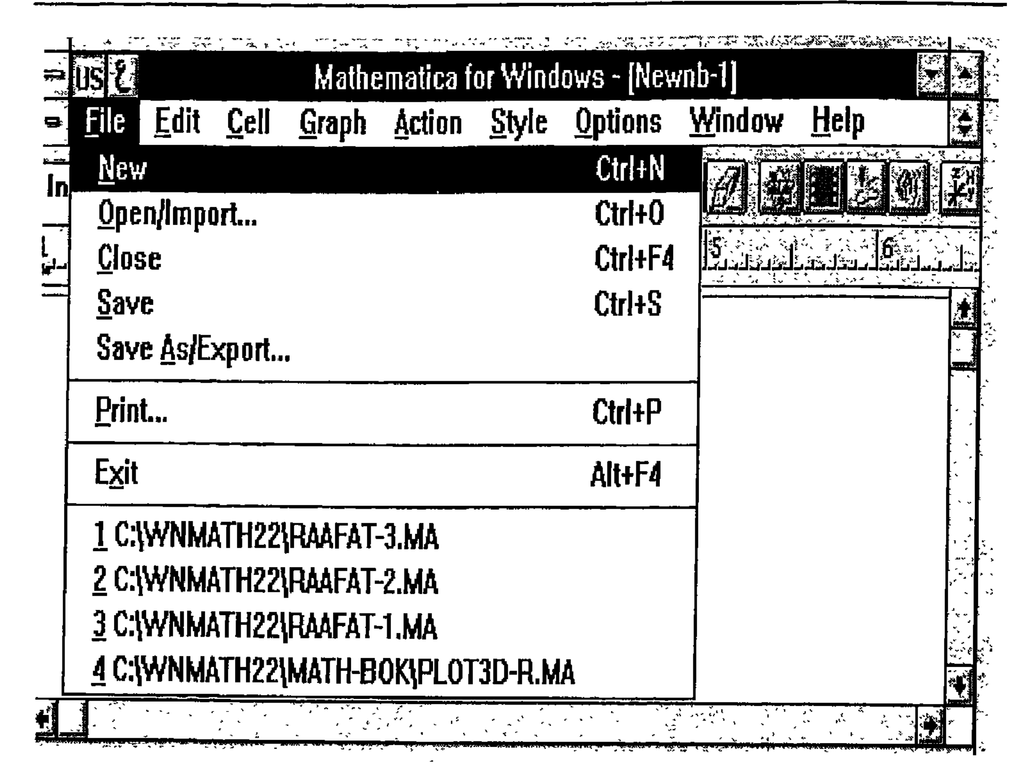
- المربع ع بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة العربية

- فى منتصف الشريط يوجد عنوان البرنامج Mathematica for Windows وأسم الملف الذى يتم التعامل معه وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بإعطاء الاسم Newnb-1 للملف عند بداية التشغيل ويمكن للمستخدم حفظ الملف بعد ذلك بالاسم الذى يريده
- فى الركن الأيمن يوجد مثلثان صغيران أحدهما يشير الى أعلى ▲ ويستخدم لتكبير واجهة البرنامج والأخر الى اسفل ▼ ويستخدم لتصغير واجهة البرنامج ويتم ذلك عن طريق تحريك مؤشر الفارة نحو رمز المثلث المطلوب ثم الضغط على زر الفارة .

الصف الثانى من أعلى هو صف القائمة الرئيسية Bar menu وبه مجموعة الاختيارات الآتية

File Edit Cell Graph Action Style Options Window Help

وبتحريك المؤشر نحو الاختيار المطلوب ثم الضغط على زر الفارة الأيسر فانه يخرج من هذا الاختيار قائمة مسحوبة تسمى بالقائمة العمودية وبها مجموعة من الاختيارات التى تسهل من العمل داخل ماثيماتيكا ، فمثلا عند الضغط بالفارة على الاختيار File الموجود فى صف القائمة الرئيسية (أو بالضغط على مفتاح Alt مع الحرف F) تظهر الشاشة الموضحة بالشكل (٨) وبها نجد مجموعة من الاختيارات الفرعية فى القائمة العمودية .

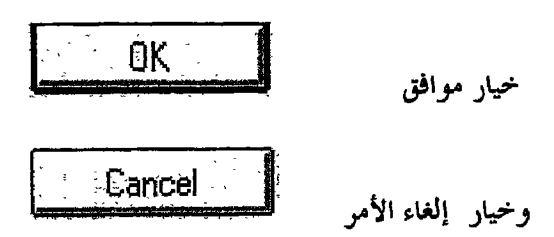


شـــــكل (٨)

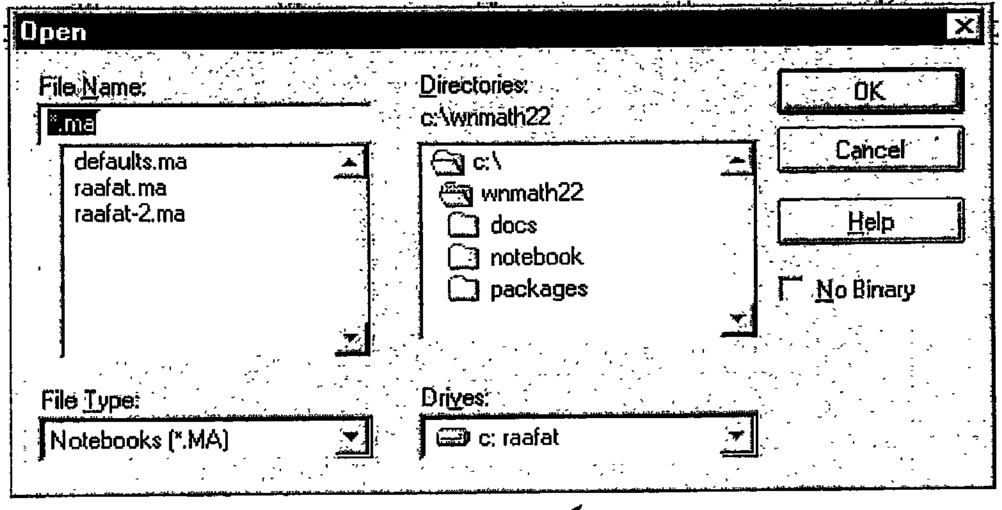
وبرنامج ماثيماتيكا يخصص بعض المفاتيح لأداء مهمة معينة والرموز الخاصة بهذه المفاتيح تكتـــب أمام الخيار فى القائمة ويطلق عليها مفاتيح الاختصار **Sort Cut Keys** فمثلا القائمة الخاصة بالاختيار **File** تحتوى على الآتي :

الخيار	مفاتيح الاختصار	الوظيفة التى يقوم بها الخيار
New	Ctrl + N	عمل ملف جديد داخل ماثيماتيكا
Open / Import	Ctrl + O	فتح ملف سبق تخزينه بواسطة برنامج ماثيماتيكا
Close	Ctrl + F4	إغلاق الملف المفتوح
Save	Ctrl + S	حفظ الملف تحت اسمه السابق
Print	Ctrl + P	طباعة الملف على جهاز الطباعة

وفى نهاية القائمة العمودية الخاصة بالاختيار **File** تظهر أسماء آخر أربعة ملفات سبق التعامل معها حيث يتم فتح آي منها بمجرد الضغط على أسم الملف المطلوب. وعند التعامل مع بعض الخيارات بالقوائم العمودية تظهر صناديق حوارية يطلق عليها **dialog boxes** وتحتوى هذه الصناديق على رسائل أو خيارات من ضمنها



فمثلا عند الضغط بمؤشر الفارة على الخيار **Open** من القائمة العمودية **File** يظهر صندوق حوارى مثل الموجود بالشكل (٩)



شكل (٩)

وبعد تحديد أسم الملف المطلوب فتحه من الخيار **File Name** ومكان وجوده على القرص من الخيار **Drives** ثم الضغط بمؤشر الفارة على موافق **OK** يتم فتح الملف المطلوب . وعن طريق الاختيار **Help** من صف القائمة الرئيسية يمكن التعرف على شرح وافى لمحتويات برنامج ماثيماتيكا .

والصف الثالث من أعلى عبارة عن شريط رمادى اللـــون وهـــو قائمـــة الأدوات Tool bar الموضحة

Input

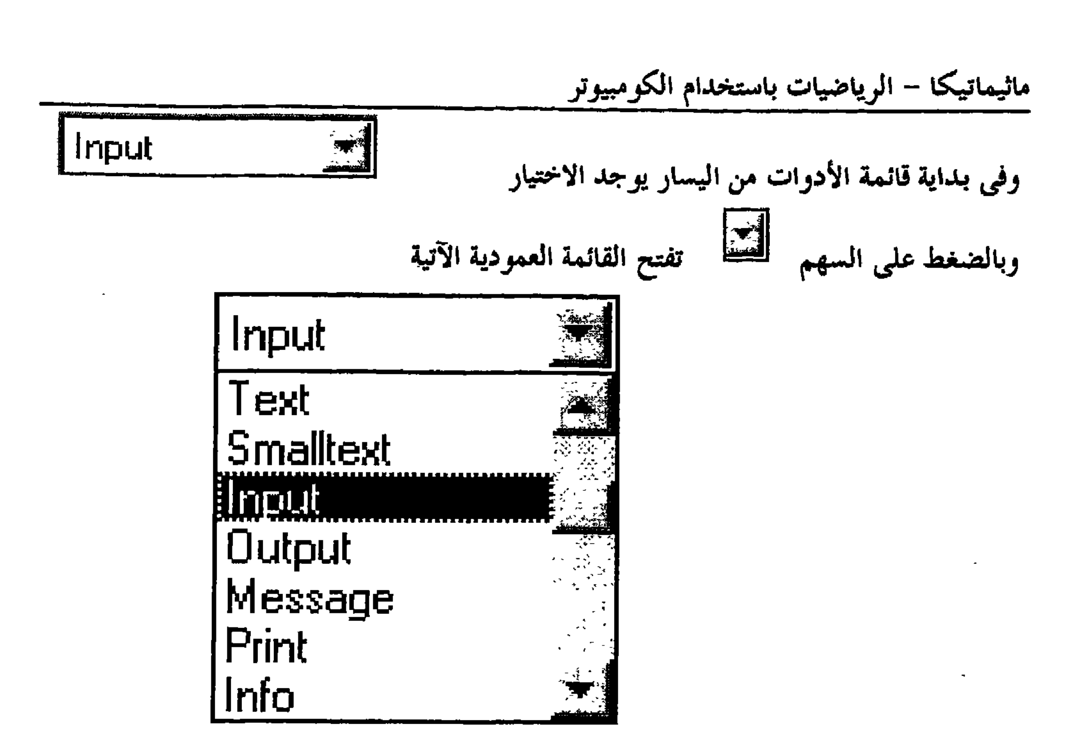
وتحتوى قائمة الأدوات على الكثير من الرموز مثل

الرمز	الوظيفة التى يقوم بها
	فتح وثيقة جديدة New
	فتح ملف قديم Open
	حفظ الملف Save
	طباعة الملف Print
	القص Cut
	النسخ Copy
	اللصق Paste
	تنفيذ الأمر Insert

وهذه الرموز تساعد المستخدم فى التعامل مع ماثيماتيكا وتنفيذ المهام بسرعة .

وفى بداية قائمة الأدوات من اليسار يوجد الاختيار

وبالضغط على السهم تفتح القائمة العمودية الآتية



وعن طريق هذه القائمة يمكن التحكم فى شكل ومواصفات البيانات المدخلة أو البيانات الناتجة .

والصف الرابع يوجد فى نهاية الجزء العلوى وهو شريط رمادى اللون وبه مسطرة ،

2 3 4 5 6

والجزء السفلى من الشاشة عبارة عن شريط رمادى اللون يسمى شريط الحالة **Status bar** ويحتوى على بعض البيانات التى تخبرنا عن حالة ماثيماتيكا كل لحظة من حيث حجم الذاكرة المتاح وبيانات عن العمليات التى يتم إدخالها وتنفيذها

Evaluating 37208K Bytes Free

وأعلى هذا الشريط وفى الجانب الأيمن من الشاشة توجد شرائط التصفح أو شرائط التمرير وعن طريق المؤشرات الموجودة بها يمكن رؤية المزيد من المعلومات على الواجهة والتى قد تحجب فى أثناء العمل ،

أما المساحة البيضاء المحصورة بين الجزء العلوى والجزء السفلى فى الواجهة فإنها تمثل منطقة العمل ويتم فيها كتابة الأوامر والعمليات المطلوب تنفيذها بنفس الطريقة التى نكتب بها فى أي برنامج معالج كلمات **Word Processing** فمثلا

- لمسح حرف على يسار المؤشر نضغط على مفتاح **Backspace**
- لمسح حرف على يمين المؤشر نضغط على مفتاح **Del**
- للانتقال الى سطر جديد نضغط على المفتاح **Enter**

ويمكن الاستفادة من مزايا العمل تحت نظام النوافذ **Windows** مثل ميزة

- النسخ **Copy**
- القص **Cut**
- اللصق **Paste**

<u>فمثلا</u> عندما نريد تنفيذ عملية تم كتابتها من قبل فإنه يمكن الذهاب أليها بالمؤشر وتظليلها بالفارة ثم الذهاب بالمؤشر الى الاختيار **Edit** فى صف القائمة الرئيسية والضغط على الأمر **Copy** لعمل نسخة من الجزء المظلل (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز أو بالضغط على المفتاح **Ctr** والمفتاح **V** معا من لوحة المفاتيح) وبعد ذلك نذهب بالمؤشر الى المكان المطلوب لصق النسخة فيه ثم نضغط على الأمر **Paste** من الاختيار **Edit** (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز أو بالضغط على المفتاح **Ctr** والمفتاح **X** معا من لوحة المفاتيح) وبعد الحصول على النسخة المطلوبة يتم تنفيذها أو عمل التعديلات المطلوبة بها قبل التنفيذ مما يوفر الوقت . ولإرسال أي أمر لتنفيذه بعد كتابته نضغط على مفتاح التنفيذ **Insert** (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز) .

مفتاح التنفيذ Insert عمل مفتاح التنفيذ لأى أمر من أوامر ماثيماتيكا بينما مفتاح الإدخال Enter يستخدم فى ماثيماتيكا للانتقال الى سطر جديد

وخلال دراستنا عندما نذكر جملة أرسل الأمر فهذا يعنى كتابة الأمر بعد ظهور المحث الخاص بماثيماتيكا وتنفيذه عن طريق الضغط على مفتاح التنفيذ **Insert** .

٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
Getting Information from Mathematica

فى كثير من الأحيان نحتاج الى التعرف على المعلومات الخاصة بالأوامر والدوال المختلفة فى ماثيماتيكا والتعرف على الصيغة العامة وكيفية كتابة كل من هذه الأوامر وماثيماتيكا يقدم لنا ذلك عن طريق رمز علامة الاستفهام ? فعندما ندخل الأمر

? Name

حيث **Name** يمثل أسم الأمر أو الدالة المطلوب الاستعلام عنها وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ تظهر الصيغة العامة وجميع المعلومات الخاصة بالأمر **Name** ويراعى أن يكون الحرف الأول فقط من أسم الأمر أو الدالة مكتوب بالحروف الكبيرة **Capital** وإذا كان أسم الأمر يحتوى على كلمتين أو اكثر فإن كل كلمة فى الأمر تبدأ بحرف كبير ، فمثلا لمعرفة الصيغة العامة للدالة **Log** يرسل الأمر

? Log

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الأتي

Log[z]   gives the natural logarithm of z (logarithm to base E)

Log[b, z]   gives the logarithm of z to base b.

آي أن الأمر **Log[z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم الطبيعى للعدد z للأساس e

والأمر فى الصيغة **Log[b, z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم للعدد z للأساس b

ولمعرفة الصيغة العامة لأمر الرسم **Plot** يرسل الأمر **?Plot**

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax.

Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

آي أن الأمر Plot[f, {x, xmin, xmax}] يقوم برسم الدالة f(x) في النطاق من

x = xmin الى x = xmax

والأمر في الصيغة Plot[{f1, f2,...}, {x, xmin, xmax}] يقوم برسم مجموعة الدوال ... f1, f2,

في النطاق من x = xmin الى x = xmax

وللتعرف على معلومات إضافية عن أمر الرسم Plot مثل التعرف على الخيارات التى يمكن أضافتها إلى الرسم يرسل الأمر

```
?? Plot
```

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

```
Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as afunction of x from xmin to
xmax. Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}
Options[Plot] =
{AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic, AxesLabel -> None,
AxesOrigin->Automatic,AxesStyle->Automatic,Background->Automatic,
ColorOutput -> Automatic,Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic,
Epilog-> {},Frame-> False,FrameLabel-> None,FrameStyle-> Automatic,
FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10.,
PlotDivision -> 20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25,
PlotRange -> Automatic,PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic,
Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic,
DefaultFont :> $DefaultFont, Display Function:> $DisplayFunction}
```

ونلاحظ وجود قائمة كبيرة من الخيارات التى تستخدم مع أمر الرسم Plot سوف نتعــــرف عليها بالتفصيل فى الباب الخامس (ماثيماتيكا ورسم الدوال) ٠

وللتعرف على جميع الأوامر والدوال التى تبدأ بحرف A يرسل الأمر

```
?A*
```

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

```
Abort                  Append            AbortProtect         AppendTo
Above                  Apply             Abs                  ArcCos
AbsoluteDashing        ArcCosh           AbsolutePointSize    ArcCot
AbsoluteThickness      ArcCoth           AbsoluteTime         ArcCsc
CcountingForm          ArcCsch           Accumulate           ArcSec
Accuracy               ArcSech           AccuracyGoal         ArcSin
AddTo                  ArcSinh           AiryAi               ArcTan
AiryAiPrime            ArcTanh           AiryBi               Arg
AiryBiPrime            AlgebraicRules    Array                AspectRatio
Alias                  AtomQ             All                  Attributes
Alternatives           Automatic         AmbientLight         Auxiliary
Analytic               Axes              AnchoredSearch       AxesEdge
And                    AxesLabel         Apart                AxesOrigin
ApartSquareFree        AxesStyle
ArithmeticGeometricMean
AlgebraicRulesData
```

حيث يظهر بيان بجميع الأوامر والدوال الموجودة فى برنامج ماثيماتيكا.والتى تبـــدأ بحـرف A وقد استخدمنا الرمز * ليحل مكان أي عدد من الحروف يكتب بعد الحــــرف A ويمكـــن الاستعلام عن أي من هذه الأوامر أو الدوال كما ســـبق وذكرنا ، ومـــن ذلــك نــرى أنـــه بواسطة الرمز ? يمكن التعرف على شرح وافى لجميع الأوامر والدوال فى ماثيماتيكا. ويوجـــد رمز آخر هو علامة النسبة المئوية % من خلاله يتيح لماثيماتيكا إمكانية أجراء عمليات علـــى ناتج أخرجه من قبل ٠

مثال توضيحى

-- إذا أدخلنا إلى ماثيماتيكا عملية مثل 5+3 فإن الناتج يكون 8

-- وإذا أر دنا إجراء عملية على هذا الناتج مثل طـــــرح 2 منه فإننــا نشـــير الى هـــذا الناتج بعلامة النسبة المئوية % وبالتالى بدلاً من كتابة 8-2 يكتب %-2 فيخرج لنا الناتج 6

-- وإذا أر دنا أجراء عملية أخرى على نفس الناتج الأول 8 بقســمته على 4 فإننا نشـــير إلى الناتج 8 بعلامتي نسبة مئوية %% لان الناتج 8 يسبق هذه العملية بعمليتين كمـــا يلى 4/ %% فيخرج لنا الناتج 2 .

> ولما كان ماثيماتيكا يرقم لنا كل من مدخلا ته ومخرجاته ترقيم تصــاعدى فان هناك طريقة اسهل خاصة إذا كان المطلوب أجراء عملية على نـــاتج أخرجه ماثيماتيكا قبل العملية الحالية بعدد كبير من العمليات وفى هـــذه الحالة توضع علامة النسبة المئوية يليها رقم ذلك الناتج حســب الــترقيم المعطى من ماثيماتيكا

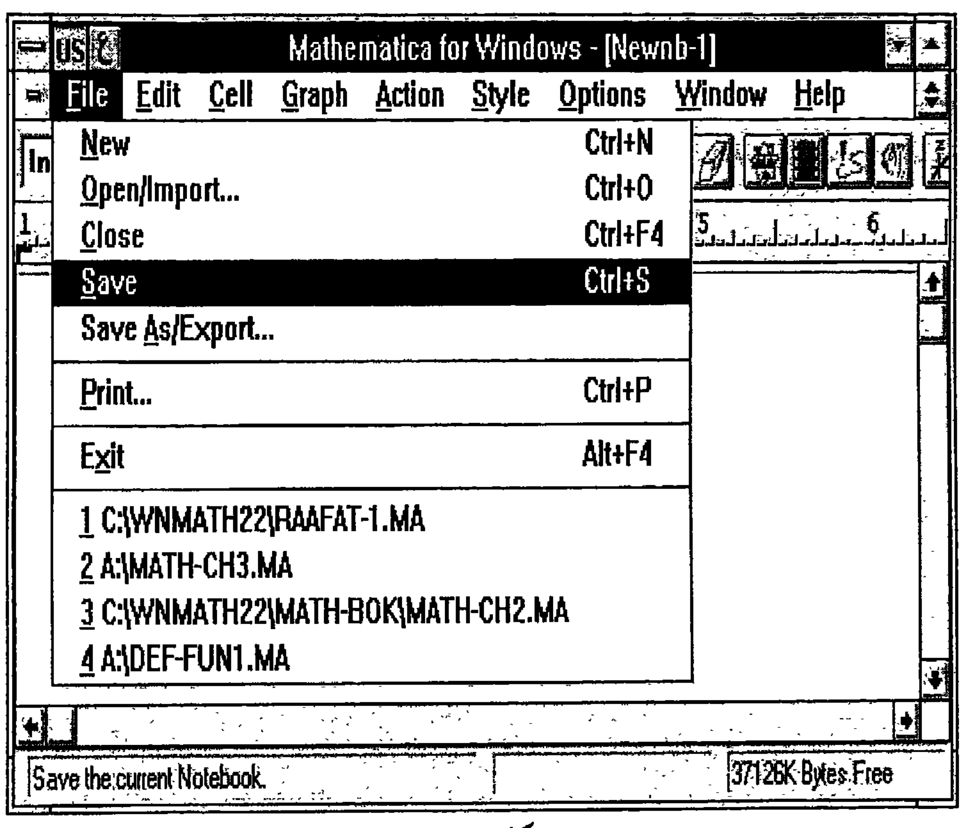
ولتوضيح ذلك

-- إذا كان 8 فى المثال السابق هو ناتج العملية رقم 40 (Out[40]) وأردنا طرح 2 منها فإننا نكتب

%40 - 2

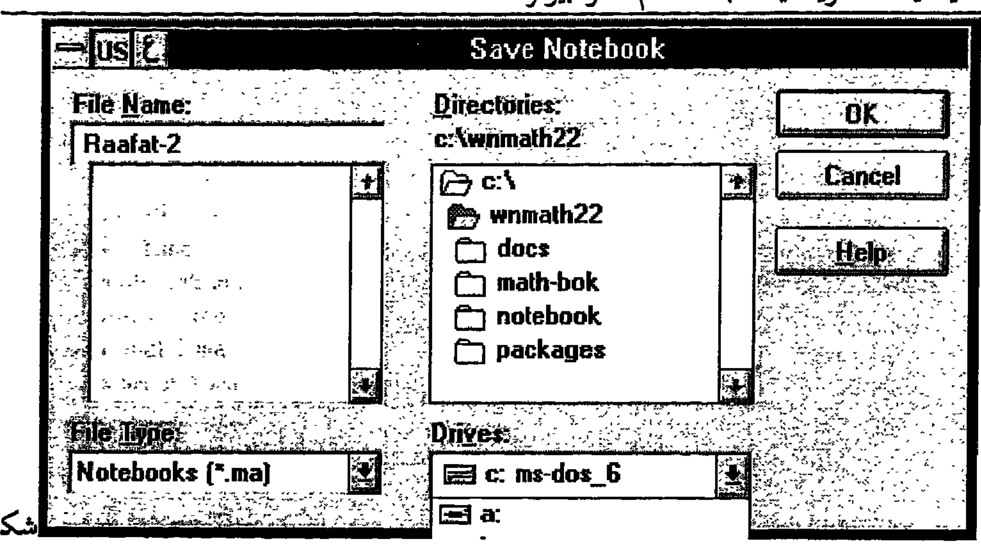
فيخرج لنا الناتج 6 .

ويقوم برنامج ماثيماتيكا بتسجيل كل ما يكتب وينفذ من أوامر في ملف يسمى دفتر **notebook** وفي نهاية العملية يقوم المستخدم **user** بحفظ هذا الدفتر في ملف تحت أسم يختاره المستخدم ويتكون اصل الاسم **root name** من حرف الى ثمانية حروف ويقوم ماثيماتيكا بوضع الاسم الممتد **extension** الخاص به وهو **ma** ويتم الحفظ عن طريق الضغط بمؤشر الفارة على **File** في شريط القائمة الرئيسية في أعلى الواجهة فتظهر قائمة عمودية مثل الموضحة في شكل (١٠) .



شكل (١٠)

وبالضغط بمؤشر الفارة على الأمر **Save** تظهر نافذة أخرى كما في الشكل (١١)



شكل (١١)

وبعد كتابة أســـــم الملف نقوم باختيار المكان الذى ســـــيحفظ فيه على القرص الصلب C أو أقراص مرنـــــة A , B ويتم ذلك بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز

Drives:

وفى الشكل (١١)

– تم تسمية الملف باسم **Raafat-2.ma**

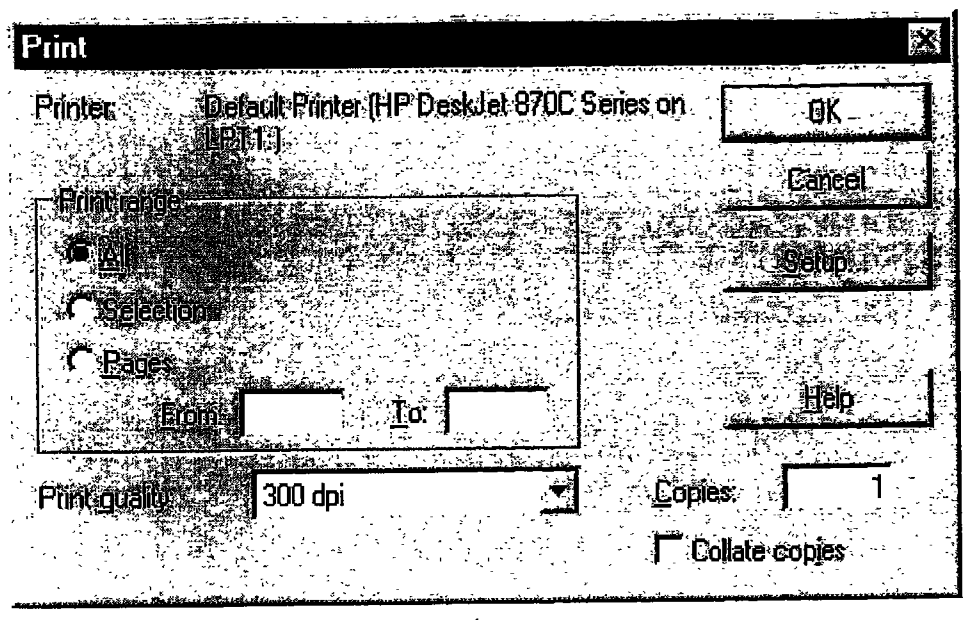
– وتم تخزينه على القرص الصلب C داخل الفهرس المفتوح **wnmath22**

وبالضغط على موافق **OK** يتم التخزين .

وأثناء التعامل مع الملف المفتوح **Raafat-2.ma** يمكن تكرار تخزينه ويتم ذلك بـــالضغط مباشرة على الاختيار **Save** وفى هذه الحالة يتم التخزين مباشرة دون ظهور النافذة الخاصة بالأمر **Save** ويمكن عمل ذلك مباشرة بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز الموجـــود فى قائمة الأدوات ويمكن حفظ الملف تحت أسم آخر وذلك بالضغط على الاختيار **Save As** .

ولطباعة الملف على الورق نضغط بالفارة على الخيـــار **Print** مـــن القائمـــة العموديـــة

File (أو بالضغط مباشرة على الرمز من قائمة الأدوات) فيظهر صندوق حوارى كما فى الشكل (١٢)



شكل (١٢)

وبواسـطة مؤشر الفارة يتم الانتقال الى الخيارات الفرعية داخل الصندوق الحوارى

لتحديد عدد النسخ المطلوبة Copies

ولتحديد الصفحات المطلوب طباعتها على الورق Print range

وتتم الطباعة على الورق بالضغط على موافق OK

وبنفس الطريقة يمكن التحول الى آي قائمة فى صف القائمة الرئيسية وتنفيذ كل ما فيهـا مـن مهام .

ومن المميزات الهامة فى برنامج ماثيماتيكا انه بالإضافة الى الدوال الكثيرة الموجودة فى قلب ماثيماتيكا والتى تشمل العديد من فروع الرياضيات فإنه يمكن للمستخدم تعريف الـــدوال الخاصة به وذلك لان ماثيماتيكا يستخدم كلغة برمجة وكذلـــك توجـــد حـــزم **packages** لموضوعات متخصصة فى الرياضيات وكل حزمة تحتوى على تعريفات رياضية لدوال متخصصة فى فرع دقيق من الرياضيات فمثلا توجد حزم متخصصة فى كل من الفروع الآتية :

Algebra	الجبر
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Geometry	الهندسة
Linear Algebra	الجبر الخطى
Number Theory	نظرية الأعداد
Numerical Analysis	والتحليل العددى
Vector Analysis	تحليل المتجهات
Statistics	الإحصاء
Linear Programming	البرمجة الخطية
Fourier Transforms	تحويلات فورير
Laplace Transforms	تحويلات لابلاس

ويتم استدعاء الحزمة عن طريق إرسال الأمر **<< PackageName**

حيث **PackageName** تمثل أسم الحزمة المطلوب استدعائها .

٤ . التعبيرات فى ماثيماتيكا
Mathematica and Expressions

برنامج ماثيماتيكا يتعامل مع أنـــواع عديدة ومختلفة من الأشياء مثل الصيغ الرياضية **mathematical formulas** والقوائم **lists** والرسوم **graphs** وعلى الرغم مـــن أن هذه الأشياء غالبا ما تبدو مختلفة لكن ماثيماتيكا يتعامل معها جميعا بشكل قياسى فى صـــورة تعبيرات **expressions** فمثلا **f[x]** يمثل تعبير فى ماثيماتيكا لتعريف دالـــة **f(x)** هـــذه الدالة لها الاسم **f** وذات متغير واحد **x** كذلك **g[x,y]** تمثل دالة **g(x,y)** لهـــا الاســـم **g** وذات متغيرين **x , y** . أيضا العملية الحسابية **x + y** تمثل تعبير فى ماثيماتيكا حيث يقوم القلب فى ماثيماتيكا بتحويله الى الشكل القياسى **Plus[x,y]** والدالة **Plus** تمثل أســـم دالة الجمع وعند طباعة الناتج مرة أخرى على الواجهة الأمامية يكتـــب بـــالصورة **x + y** وبالمثل المؤثرات الأخرى مثل الضرب والقسمة والرفع الى أس كل منها له شكل قياســـى .

X + y + z	Plus[x,y,z]
x y	Times[x,y]
x^n	Power[x,n]
{x,y,z}	List[x,y,z]
a->b	Rule[a,b]
a=b	Set[a,b]

بعض الأمثلة لتعبيرات فى ماثيماتيكا

وفى الحقيقة فإن كل شئ يتم كتابته فى الواجهة الأمامية لبرنامج ماثيماتيكا يعامل كتعبير له أسم يطلق عليه رأس التعبير Head وهذا الاسم قد يمثل

- عملية Operation مثل الجمع أو الطرح Plus ، الضرب أو القسمة Times
- بناء Structure مثل القائمة List

ويأخذ الاسم معامل argument أو اكثر Name[arguments] ويجب ملاحظة أن معاملات جميع الدوال فى ماثيماتيكا توضع داخل أقواس مربعة من النوع [ ] .

للاستعلام عن أسم التعبير يستخدم الأمر **Head**

للاستعلام عن الشكل القياسى أو البناء الكامل للتعبير يستخدم الأمر **FullForm**

وفى الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة لاستخدام الأمر **Head** والأمر **FullForm**

عند تطبيق الدالة Head على العملية x+y+z فان الناتج يكون Plus	In[1]:=Head[x+y+z] Out[1]:Plus
عند تطبيق الدالة FullForm على العملية x+y+z فان الناتج يكون Plus[x,y,z]	In[2]:= FullForm[x+y+z] Out[2]=Plus[x,y,z]
عند تطبيق الدالة Head على العملية x*y فان الناتج يكون Times	In[3]:= Head[x*y] Out[3]=Times
عند تطبيق الدالة Head على العملية x*y+z والتى تشمل ضرب x*y ثم الجمع الى z فان الناتج يكون Plus والذى يمثل عنوان العملية النهائية	In[4]:= Head[x*y+z] Out[4]=Plus
عند تطبيق الدالة FullForm على العملية x*y+y فان الناتج يكون Plus[Times[x, y], z]	In[5]:= FullForm[x*y+z] Out[5]=Plus[Times[x, y], z]
عند تطبيق الدالة FullForm على العملية 4+5x^2 فان الناتج يكون Plus[4,Times[5,Power[x,2]]]	In[6]:=FullForm[4+5x^2] Out[6]=Plus[4,Times[5,Power[x,2]]

إذا كان التعبير يحتوى على أجزاء متعددة ومتداخلة فيمكن التعرف على البناء الشجرى Tree Structure باستخدام الأمر Tree Form

```
In[7]:=TreeForm[x^3+(1+x)^2]
Out[7]=
      Plus[ |              ,  |                 ]
            Power[x, 3]    Power[ |        , 2]
                                  Plus[1, x]
```

وعند تطبيق الدالة Head على عدد صحيح Integer أو عدد نسبى Rational أو عدد مركب Complex فإن الناتج يمثل نوع العدد ،

عند تطبيق الدالة Head على العدد 25 فإن الناتج يكون عبارة صحيح Integer والتى تفيد نوع العدد المستخدم

```
In[8]:Head[25]
Out[8]:=Integer
```

عند تطبيق الدالة Head على العدد $\frac{3}{4}$ فإن الناتج يكون عدد نسبى Rational

```
In[9]:Head[3/4]
Out[9]:= Rational
```

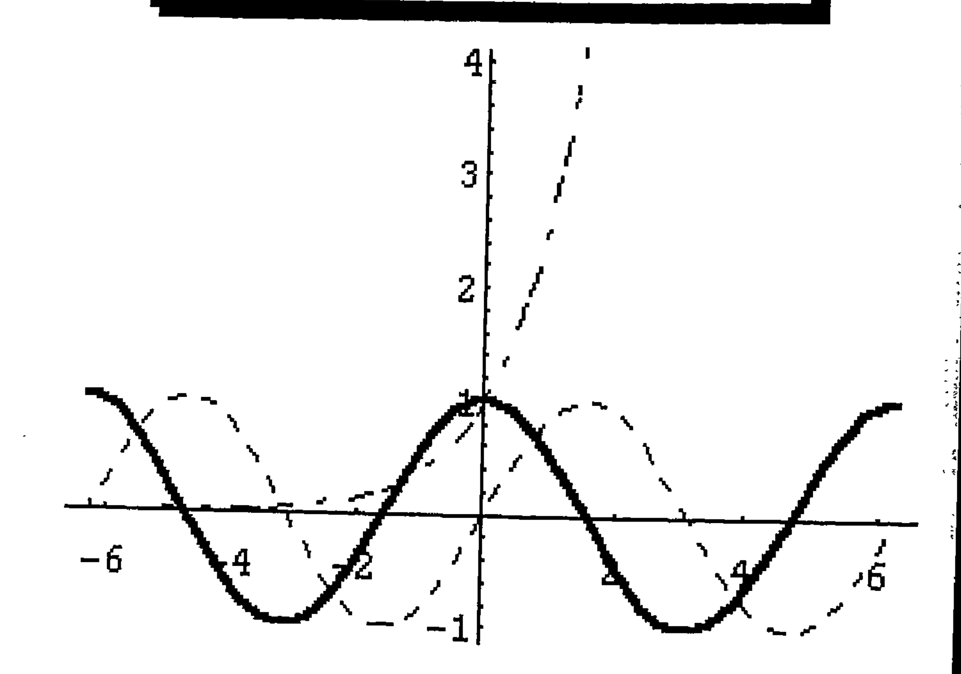
عند تطبيق الدالة Head على العدد 2.4 فإن الناتج يكون عدد حقيقى Real

```
In[10]:Head[2.4]
Out[10]:=Real
```

عند تطبيق الدالة Head على العدد 3+4I فإن الناتج يكون عدد مركب Complex

```
In[11]:Head[3+4I]
Out[11]:=Complex
```

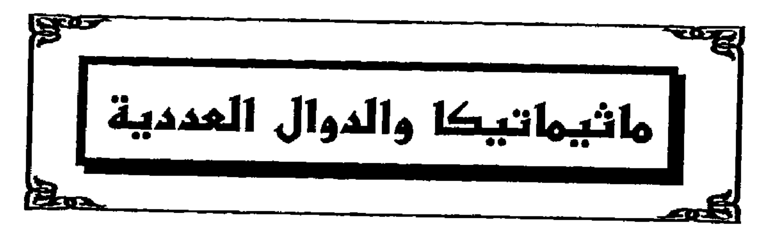
الباب الثانى
ماثيماتيكا والدوال العددية



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . الحسابات العددية	Numerical Calculations
٢ . الأنظمة العددية	Number Systems
٣ . المتغيرات	Variables
٤ . بعض الدوال الرياضية	Some Mathematical Functions
٥ . الأعداد المركبة	Complex Numbers

الباب الثانى



ماثيماتيكا والدوال العددية

برنامج ماثيماتيكا يحتوى على العديد من الدوال العددية وكما علمنا فإن ماثيماتيكا يتيح للمستخدم الاستعلام عن كافة الأوامر والدوال باستخدام الرمز ؟ لذلك يمكن استخدام هـــذا الرمز للاستعلام عن جميع أوامر ودوال ماثيماتيكا لنتعرف على الصيغة العامة لكـــل مـــن هـــذه الأوامر وسوف نعطى أمثلة توضيحية لكل أمر من هذه الأوامر ٠

١ـ الحسابات العددية Numerical Calculations

فى ماثيماتيكا يوجد أربعة أنواع من الأعداد.وهى

- الأعداد الصحيحة **Integers**
- الأعداد النسبية **Rational**
- الأعداد الحقيقية **Real**
- الأعداد المركبة **Complex**

ويستخدم ماثيماتيكا رموز المؤثرات الحسابية المعروفة وهى

مؤثر الجمع	+
مؤثر الطرح	−
مؤثر الضرب	*
مؤثر القسمة	/
مؤثر الرفع الى أس	^

x^y	Power	الرفع إلى أس
x + y	Add	الجمع
x - y	Subtraction	الطرح
x y (or) x*y	Multiply	الضرب
x/y	Divide	القسمة

المؤثرات الحسابية فى ماثيماتيكا

ويمكن استخدام ماثيماتيكا كأداة لأجراء العمليات الحسابية تماما مثل الآلة الحاسبة Calculator .

لحساب مجموع عددين

In[1]:=3.5+6.823

Out[1]= 10.323

لحساب خارج قسمة عددين

In[2]:=2.5/7.3

ونلاحظ أن الناتج عدد فى الصورة العشرية

Out[2]= 0.342466

عند إدخال هذه الكمية الحسابية نلاحظ أن الناتج

In[3]:= (7^2-25*3)/(23+5^4)+42

عدد نسبى لأن الأعداد المستخدمة أعداد صحيحة

Out[3]= $\frac{13595}{324}$

وعند عمل الحسابات على الآلة الحاسبة العادية فإن النتائج تكون الى دقة معينة ، مثلا عشرة أرقام عشرية ، ولكن مع ماثيماتيكا غالبا ما نحصل على نتائج مضبوطة exact results ،

فى ماثيماتيكا نحصل على قيمة مضبوطة للعدد 2^{100} على الرغم من أن الناتج يحتوى على 31 رقم

In[4]:=2^100
Out[4]=1267650600228229401496703205376

وفي ماثيماتيكا يمكن الحصول على ناتج عددى تقريبى للكميات الحسـابية وذلـك باسـتخدام الأمر N كما يمكن الحصول على النتائج مقربة الى أي درجة دقة مطلوبة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
N[expr] **or** **expr//N**	للحصول على قيمة عددية للتعبير **expr**
N[expr,n]	للحصول على قيمة عددية للتعبير **expr** مقربة الى **n** من الأرقام العشـرية
Rationalize[x]	للحصول على عدد نسبى **Rational** تقريبى للعدد **x**
Precision[x]	لمعرفة عدد الخانات العشرية **decimal digits** فى العدد **x**
Accuracy[x]	لمعرفة عدد الخانات المعنوية **Significant digits** على يمين العلامة العشرية فى العدد **x**

للحصول على قيمة عددية تقريبية للعدد 2^{100}

In[5]:=2^100//N
Out[5]= 1.26765 10^{30}

للحصول على 2^{100} مقربا الى 15 من الأرقام العشرية

In[6]:= N[2^100,15]
Out[6]= 1.26765060022823 10^{30}

للحصول على قيمة عددية تقريبية للكمية الحسابية المدخلة فى جملة الإدخال In[3]

```
In[7]:= N[%3]
Out[7]: 41.9599
```

ويمكن عمل ذلك بطريقة أخرى كما يلى

```
In[8] := (7^2-25*3)/(23+5^4)+42//N
Out[8]= 41.9599
```

وللحصول على الناتج من العملية الحسابية مقربا الى 20 رقم عشرى

```
In[9]:= N[(7^2-25*3)/(23+5^4)+42,20]
Out[9]= 41.959876543209876543
```

وللحصول على الناتج السابق فى صورة عدد نسبى تقريبى

```
In[10]:=Rationalize[%]
```

Out[10]= $\frac{13595}{324}$

لمعرفة عدد الخانات العشرية فى العدد الناتج من جملة الإدخال In[9]

```
In[11] := Precision[%9]
Out[11]= 20
```

لمعرفة عدد الخانات المعنوية على يمين العلامة العشرية فى العدد الناتج من جملة الإدخال In[9]

```
In[12] := Accuracy[%9]
Out[12]= 18
```

٢ . الأنظمة العددية Number Systems

النظام العشرى Decimal System يعتبر أقدم نظام عددى عرفه الإنسان فقد ابتكره القدماء المصريين منذ حوالى 3400 سنة قبل الميلاد وهو من اشهر الأنظمة العددية وأكثرها انتشارا ، والأرقام المستخدمة فى النظام العشرى هى 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 وعددها عشرة أرقام لذلك فإن أساس Base النظام العشرى يساوى 10 ، ومع ظهور الحاسبات الآلية ظهرت الحاجة الى استخدام أنظمة عددية أخرى وفى الجدول الأتى نوضح بعض الأنظمة العددية وأساس كل نظام والأرقام المستخدمة فيه .

النظام العددى	أساس النظام Base	الأرقام المستخدمة
النظام الثنائى Binary System	2	0 , 1
النظام الثمانى Octal System	8	0,1,2,3,4,5,6,7
النظام السداسى عشرى Hexadecimal System	16	0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9,a,b,c,d,e,f

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن تحويل الأعداد الصحيحة أو الكسرية بين الأنظمة العددية المختلفة , وإذا كان أساس النظام الذى يتم التعامل معه اكبر من 10 فإنه يتم استخدام الحروف الأبجدية من a الى z حيث a تمثل 10 , b تمثل 11 , c تمثل 12 وهكذا ، ويتم التحويل بين الأنظمة العددية المختلفة كالآتي :

b^^nnnnn	لتحويل العدد nnnnn من النظام ذو الأساس b الى النظام العشرى
BaseForm[x,b]	لتحويل العدد x من النظام العشرى الى النظام ذو الأساس b والناتج يحتوى على أساس النظام المحول أليه

لتحويل العدد $(101101)_2$ من النظام الثنائى الى النظام العشرى

```
In[1]:=2^^101101
Out[1]=45
```

لتحويل العدد 45 من النظام العشرى الى النظام الثنائى

```
In[2]:=BaseForm[45,2]
Out[2]=101101  2
```

لتحويل العدد $(a3bf)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام العشرى

```
In[3]:= 16^^a3bf
Out[3]= 41919
```

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام الثنائى

```
In[4]:=BaseForm[16^^bf3,2]
Out[4]=101111110011 2
```

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام الثمانى

```
In[5]:=BaseForm[16^^bf3,8]
Out[5]= 5763 8
```

لتحويل العدد الكسرى $(10111.1101)_2$ من النظام الثنائى الى النظام العشرى

```
In[6]:=2^^10111.1101
Out[6]= 23.8
```

لتحويل العدد الحقيقى $\sqrt{2}$ من النظام العشرى الى النظام الثنائى

```
In[7]:=BaseForm[N[Sqrt[2]],2]
Out[7]= 1.0110101000001001111 2
```

وفى ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد فى الأنظمة العددية المختلفة .

حساب مجموع عددين فى النظام الثنائى والناتج يكون فى النظام العشرى

```
In[8]:=2^^1101001+2^^101111
Out[8]=152
```

حساب مجموع عددين فى النظام الثنائى والناتج يكون فى النظام الثنائى

```
In[9]:=BaseForm[2^^1101001+2^^101111,2]
Out[9]=10011000 2
```

حساب حاصل طرح عددين فى النظام الثنائي والناتج فى النظام الثنائى

```
In[10]:=BaseForm[2^^11011.1011-2^^101111.1001,2]
Out[10]=-10011.111 2
```

حساب مجموع عددين فى النظام الثمانى والناتج يكون فى النظام الثمانى

```
In[11]:=BaseForm[8^^36.72+8^^74.02,8]
Out[11]=132.74 8
```

حساب مجموع عددين فى النظام السداسى عشرى

```
In[12]:=BaseForm[16^^af5.e6-16^^fe.9ab,16]
Out[12]=9f7.4b 16
```

حساب حاصل ضرب عددين فى النظام الثنائي والناتج يكون فى النظام العشرى

```
In[13]:=2^^101 2^^110
Out[13]=30
```

حساب خارج قسمة عددين فى النظام الثنائى

```
In[14]:=BaseForm[2^^11011.101/2^^110.011,2]
Out[14]=100.01010101010101011 2
```

حساب خارج قسمة عددين فى النظام السداسى عشرى

```
In[15]:=BaseForm[16^^af6.ec4/16^^ec.fa3,16]
Out[15]=b.d83e 16
```

٣ . المتغيرات Variables

عند عمل الحسابات فى ماثيماتيكا يكون من المفيد دائما إعطاء أسماء للقيم العددية أو للكميات الحسابية الناتجة ويتم ذلك بإدخال أسماء متغيرات variables هذه القيم أو للكميات الحسابية .

x=value	لوضع القيمة value داخل المتغير x
x=y=value	لوضع القيمة value لكل من المتغيرات x,y
x=.	لحذف اى قيمة تم إحلالها من قبل للمتغير x

وعند اختيار أسماء للمتغيرات داخل ماثيماتيكا يجب مراعاة الأتى :

- فى أسماء المتغيرات لا يوجد اى قيود على عدد الحروف أو الأرقام المستخدمة فى أسم المتغير ويجب عدم استخدام العلامات الخاصة (+ , / , ^ , ...) فى أسم المتغير .
- أسم المتغير لا يبداء بعدد فمثلا 2x تمثل حاصل الضرب 2*x بينما x2 تمثل أسم لمتغير .
- فى ماثيماتيكا يمكن استخدام الحروف الكبيرة والصغيرة upper and lower-case letters فى أسماء المتغيرات ولكن يجب ان يبداء أسم المتغير بحرف ابجدى صغير lower-case letter حتى لا يحدث تداخل بين أسماء المتغيرات التى نقوم بتعريفها وبين أسماء المتغيرات أو الدوال المعرفة داخل بناء ماثيماتيكا built-in .
- داخل العمل فى ماثيماتيكا فإن أسم المتغير يحتفظ بالقيمة التى يتم إحلالها داخله حتى يقوم المستخدم بتغيرها أو حذفها فمثلا إذا وضعناx=5 فإن ماثيماتيكا يفترض انك تريد دائما للمتغير x أن يكون له القيمة 5 داخل الدفتر notebook الذى نتعامل معه ألا إذا قمت بتغيرها أو حذفها .

جعل المتغير x له القيمة 5 يكتب x=5

```
In[1]:=x=5
Out[1]=x=5
```

وعند ظهور x فى أي عملية بعد ذلك
سوف تستبدل بالقيمة 5

```
In[2]:=x^2
Out[2]=25
```

عند إعطاء قيمة جديدة للمتغير x فإنه يتم
إلغاء القيمة السابقة والتعامل مع القيمة الجديدة .

```
In[3]:=x=7
Out[3]=x=7
```

عند حساب x^2 يتم التعامل مع القيمة
الجديدة للمتغير x

```
In[4]:=x^2
Out[4]=49
```

يمكن إلغاء القيـــمة المخزنة فى المتغير x
باستخدام المؤثر =.

```
In[5]:= x=.
```

وعند الاستعلام عن قيمة x يتم
طبـــــــاعة x بدون قيمة

```
In[6]=x
Out[6]=x
```

وفى ماثيماتيكا يمكن كتابة اكثر من عمليـــــة رياضية على سطر واحد بجملة إدخـــال واحدة بشرط أن يفصــــل كل عملية عن الأخرى بالفاصلة المنقوطة (;) وفى هذه الحالـــة فإن ناتج التنفيذ يعطى ناتج آخر عملية تم إدخالها فى السطر أما إذا انتهى سطر الإدخال بالفاصلة المنقوطة (;) فهذا يعنى رغبة المستخدم فى عدم ظهور الناتج .

إدخال اكثر من عملية رياضية على سطر واحد في جملة إدخال واحدة ونلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون ناتج آخر عملية مدخلة في السطر

```
In[7]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c
Out[7]=30
```

في حالة أنتها السطر بالفاصلة المنقوطة ; فإنه لا تظهر جملة الناتج

```
In[8]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c
```

ونعرض الآن بعض الملاحظات التي يجب مراعاتها عنداستخدام المتغيرات في ماثيماتيكا

x y تعني حاصل ضرب المتغير x في المتغير y أي أن وجود مسافة بين المتغيرين يعني أجراء عملية الضرب

xy تعني متغير له الاسم xy

5x تعني حاصل ضرب 5 في المتغير x أي أنه يمكن الأستغناء عن المسافة أو علامة الضرب * بين عدد ومتغير بشرط أن يكون العدد أولا

x5 تعني متغير له الاسم x5

x^2y تعني $x^2 y$ وليس x^{2y}

وفي لغات الحاسب المعروفة مثل لغة الفورتران FORTRAN أو لغة السي C فإنه يجب على المستخدم الإعلان Declaration عن أسماء المتغيرات قبل استخدامها فمثلا إذا كتبنا في برنامج فورتران جملة مثل x=5 وكان المتغير x لم يتم الإعلان عنه في بداية البرنامج فإن

مترجم لغة الفورتران يرفض ترجمة البرنامج ويعطى رسالة تفيد بوجود متغير لم يتم الإعلان عنه ، ولكن في برنامج ماثيماتيكا يختلف الوضع تماما حيث لا يطلب ماثيماتيكا الإعلان عن المتغيرات التى نستخدمها داخل العمل فى دفتر معين notebook وانما يقوم ماثيماتيكا بحفظ أسماء المتغيرات التى تدخل اليه مستخدما فى ذلك نظام السياقات Context الذى يشبه نظام الفهارس المستخدم فى نظام التشغيل DOS وهذا يعنى انه يمكن وضع كل مجموعة من المتغيرات فى سياق معين وهذا النظام يتيح للمستخدم إعادة استخدام أسماء المتغيرات فى السياقات المختلفة وذلك لان الأسم الكامل لاي متغير هو الأسم الذى نعطيه له بالإضافة الى أسم السياق الذى نضعه فيه وهذا يتيح للمستخدم الحرية والسهولة فى التعامل مع المتغيرات داخل ماثيماتيكا دون الإعلان عنها ، ومن اهم السياقات فى ماثيماتيكا السياق `Global وهو السياق الفعال عند تشغيل البرنامج ويضع فيه ماثيماتيكا كل المتغيرات التى نقوم بتعريفها ما لم ننص على وضعها فى سياق آخر , والسياق `System ويضع فيه ماثيماتيكا كل الأوامر والدوال الموجودة فيه built-in , ولكن يجب على المستخدم مراعاة حذف قيم المتغيرات التى تم الانتهاء من التعامل معها فى سياق معين حتى لا يحدث خطاء فى استخدام قيم لا نريدها للمتغيرات ،

وضع القيمة 8 فى المتغير x

```
In[9]:=x=8;
```

للاستعلام عن التعريف الذى يحتفظ به ماثيماتيكا للمتغير x ومعرفة السياق الموجود به المتغير x

```
In[10]:=?x
Global`x
x=8
```

وبالإضافة الى المؤثرات الحسابية توجد المؤثرات العلاقية **Relational Operators** والتى تربط متغيرات أو تعبيرات رياضية ويكون الناتج كمية منطقية صواب **True** أو خطأ **False** .

العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى	المؤثر العلاقى
إحلال قيمة y داخل المتغير x	`x=y`
اختبار ما إذا كان x يساوى y	`x= =y`
اختبار ما إذا كان x اكبر من y	`x>y`
اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يســاوى y	`x>=y`
اختبار ما إذا كان x اقل من y	`x<y`
اختبار ما إذا كان x اقل من أو يســاوى y	`x<=y`
اختبار ما إذا كان x لا تســاوى y	`x!=y`

إحلال القيم 6,8,3 الى المتغيرات x , y , z
على الترتيب ثم اختبار ما إذا كان $x > y - z$
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

```
In[11]:=x=6;y=8;z=3;x>y-z
Out[11]= True
```

اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يساوى y
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

```
In[12]:=x>=y
Out[12]= False
```

كذلك يوجد نوع آخر من المؤثرات هو المؤثـرات المنطقيـة Logical Operations والتى تربط كميات منطقية p , q ويكون الناتج كمية منطقيـة صـواب True أو خطـأ False .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
!p	Not p
p&&q	p and q
$p \parallel q$	p or q

ومن المعلوم ان جدول الصواب والخطأ للمؤثرات العلاقية يكون فى الصورة

p	q	! p	p&&q	$p \parallel q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

إحلال القيم 4,7,5 الى المتغيرات a , b , c على الترتيب

```
In[13]:= a=4;b=7;c=5;
```

اختبار ما إذا كان b>=a+c and a<c ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

```
In[14]:=b>=a+c&&a<c
Out[14]= False
```

اختبار ما إذا كان b>=a+c or a<c ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

```
In[15]:=b>=a+c || a<c
Out[15]= True
```

٤ . بعض الدوال الرياضيـــة
Some Mathematical Functions

يوجد داخل بناء ماثيماتيكا اكثر من 1000 دالة معرفة الى جانب العديد مـــن الــدوال المعرفة فى حزم خارجية **External Packages** وهذه الدوال لها أسماء داخل ماثيماتيكـــا وفقا للقواعد الآتية :

- يتكون أسم الدالة من الكلمات الإنجليزية الكاملة لأسم الدالة أو الأختصار الرياضى لأســم الدالة .

- الحرف الأول من كل كلمة **word** فى أسم الدالة يكتب كبـــير **Capital** وبـــاقى حروف الكلمة يكتب صغير **lower-case letter** .

- إذا انتهى أسم الدالة بالحرف **Q** فهذا يعنى ان الدالة تمثل سؤال منطقى وتكـــون الإجابـــة صواب **True** أو خطأ **False** .

ونتعرف الآن على بعض الدوال العددية الموجودة فى ماثيماتيكا ووظيفة كل منها ،

الدالة الرياضيـــــة	الدالة فى ماثيماتيكـــــا
دالة الجذر التربيعى $\sqrt{x}$	Sqrt[x]
الدالة الآسية e^{x}	Exp[x]
دالة اللوغاريتم للأساس الطبيعى $\log_e x$	Log[x]
دالة اللوغاريتم للأساس b $\log_b x$	Log[b,x]
الدوال المثـــلثـــيـــة Trigonometric Functions حيث x مقاسه بالتقدير الدائرى	Sin[x] , Cos[x] , Tan[x] Csc[x] , Sec[x] , Cot[x]
الدوال المثـــلثـــيـــة العكسية Inverse Trigonometric Functions	ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x] ArcCsc[x] , ArcSec[x] , ArcCot[x]
الدوال الزائـــــــديـــــة Hyperbolic Functions	Sinh[x] , Cosh[x] , Tanh[x] Csch[x] , Sech[x] , Coth[x]
الدوال الزائـــديـــة العكســـية Inverse Hyperbolic Functions	ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x] ArcCsch[x], ArcSech[x], ArcCoth[x]
القيمة المطلقة $\|x\|$	Abs[x]
إيجاد اكبر عدد من الأعداد x1 , x2 , ...	Max[x1,x2,...]
إيجاد اصغر عدد من الأعداد x1 , x2 , ...	Min[x1,x2,...]

حساب قيمة عددية للجذر التربيعي $\sqrt{3}$

```
In[1]:=Sqrt[3]//N
Out[1]=1.73205
```

حساب قيمة $e^{2.5}$

```
In[2]:=Exp[2.5]
Out[2]=12.1825
```

حساب قيمة $\log_2 256$

```
In[3]:=Log[2,]
Out[3]=8
```

حساب قيمة عددية لدالة الجيب sin (2)

```
In[4]:=Sin[2]//N
Out[4]=0.909297
```

حساب قيمة دالة جيب التمام العكسية $\cos^{-1}(.5)$

```
In[5]:=ArcCos[.5]
Out[5]=1.0472
```

حساب قيمة عددية لدالة الجيب الزائدية sinh(4)

```
In[6]:=Sinh[4]//N
Out[6]=27.2899
```

حساب القيمة المطلقة $|-5|$

```
In[7]:=Abs[-5]
Out[7]=5
```

حساب العدد الأكبر من قائمة الأعداد {9,4,-6,3,8,12}

```
In[8]:=Max[9,4,-6,3,8,12]
Out[8]=12
```

حساب العدد الأصغر من قائمة الأعداد {9,4,-6,3,8,12}

```
In[9]:=Min[9,4,-6,3,8,12]
Out[9]= -6
```

وفى ماثيماتيكا يوجد بعض الثوابت الرياضية **Mathematical Constants** لها أسماء معينة

I	$i = \sqrt{-1}$
Infinity	∞
Pi	$\pi \cong 3.14159$
Degree	$\pi / 180$
E	$e \cong 2.71828$
GoldenRatio	$(1+\sqrt{5})/2 \cong 1.61803$

```
In[10]:=N[Pi^2]
Out[10]= 9.8696
```

لحساب القيمة العددية للثابت π مرفوع للأس **2**

```
In[11]:=Sin[Pi/2]
Out[11]=1
```

لحساب قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

```
In[12]:=Cos[60 Degree]//N
Out[12]=0.5
```

لحساب قيمة $\cos(60^o)$
حيث الزاوية مقاسه بالتقدير الستينى

```
In[13]:=E^2//N
Out[13]=7.3890
```

لحساب قيمة e^2

الصيغة العامة للدالة فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى تقوم بها الدالة
Round[x]	للحصول على اقرب عدد صحيح من x
Floor[x]	للحصول على اكبر عدد صحيح اقل من أو يساوى x
Ceiling[x]	للحصول على اصغر عدد صحيح اكبر من أو يساوى x.

والجدول الآتي يوضح عمل هذه الدوال عند تطبيقها على بعض الأعداد

X	Round[x]	Floor[x]	Ceiling[x]
2.4	2	2	3
2.5	2	2	3
2.6	3	2	3
-2.4	-2	-3	-2
-2.5	-2	-3	-2
-2.6	-3	-3	-2

الصيغة العامة للدالة فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى تقوم بها الدالة
Mod[m, n]	إيجاد باقى خارج القسمة $\frac{m}{n}$ (m modulo n)
Quotient[m,n]	إيجاد الجزء الصحيح من خارج القسمة $\frac{m}{n}$
GCD[n1,n2,...]	إيجاد القاسم المشترك الأعلى Greatest Common Divisor للأعداد n1 , n2 , ...
LCM[n1,n2,...]	إيجاد المضاعف المشترك الأدنى Least Common Multiple للأعداد n1 , n2 , ...
Divisors[n]	إيجاد قائمة بالأعداد الصحيحة التى تقسم العدد n
Prime[k]	إيجاد العدد الأولى رقم k
PrimeQ[n]	إذا كان العدد n عدد أولى فإن الناتج يكون صواب True وخلاف ذلك يكون الناتج خطاء False

حساب باقي قسمة 17 على 3

```
In[14]:=Mod[17,3]
Out[14]=2
```

حساب الجزء الصحيح من خارج قسمة 17 على 3

```
In[15]:=Quotient[17,3]
Out[15]=5
```

حساب القاسم المشترك الأعلى للأعداد 24 ,16 , 12
وهو يمثل اكبر عدد صحيح يقسم العددين

```
In[16]:=GCD[12,16,24]
Out[16]=4
```

حساب المضاعف المشترك الأدنى
للأعداد 24 , 16 , 12

```
In[17]:=LCM[12,16,24]
Out[17]=48
```

عمل قائمة تحتوى على قواسم
العدد 24

```
In[18]:=Divisors[24]
Out[18]={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
```

الحصول على العدد الأولى رقم 100

```
In[19]:=Prime[100]
Out[19]=541
```

اختبار ما إذا كان العدد 81 عدد أولى

```
In[20]:=PrimeQ[81]
Out[20]=False
```

الصيغة العامة للدالة في ماثيماتيكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
n!	حساب دالة مضروب n
Binomial[n, m]	معامل ذات الحدين $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
Sign[x]	تحديد إشارة x وتكون +1 إذا كان x > 0 أو 0 إذا كان x=0 أو -1 إذا كـــان x < 0
Random[]	للحصول على عدد عشوائي محصور بين 0 , 1
Random[type, range]	للحصول على عدد عشوائي من النوع type وفي المدى range ، والنوع type قد يكون حقيقي Real أو صحيـــح Integer أو مركـــب Complex والمدى range يكون بالصورة {min , max}
Random[type, range,n]	للحصول على عدد عشوائي من النوع type وفي المدى range وبدقة n من الأرقام العشرية

حساب قيمة مضروب 30

```
In[21]:=30!
Out[21]=265252859812191058636308480000000
```

حساب قيمة عددية تقريبية لمضروب 30

```
In[22]=30!//N
Out[22]=2.65253 10^32
```

حساب قيمة معامل ذات الحدين $\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,5!}$

```
In[23]:=Binomial[8,3]
Out[23]=56
```

للحصول على عدد عشوائي محصور بين 1,0

```
In[24]:=Random[]
Out[24]=0.440108
```

للحصول على عدد صحيح عشوائي محصور بين 10 , 50

```
In[25]:=Random[Integer,{10,50}]
Out[25]=32
```

للحصول على عدد حقيقي عشوائي محصور بين 20 , 2.5 وبدقة 15 رقم عشرى

```
In[26]:=Random[Real,{2.5,20},15]
Out[26]=7.57929458180578
```

٥ . الأعداد المركبة Complex Numbers

في ماثيماتيكـــا يمكن التعامل مع الأعداد المركبـــة التي على الصورة x + I y حيث I يمثل المقدار التخيلي $\sqrt{-1}$ وفيما يأتي نعرض بعض العمليات على الأعداد المركبة

العدد المركب x + iy	x + I y
الجزء الحقيقى من العدد المركب z	Re[z]
الجزء التخيلى من العدد المركب z	Im[z]
العدد المرافق للعدد المركب z	Conjugate[z]
القيمة المطلقة للعدد المركب z	Abs[z]
سعـــة العدد المركب z حيث $z = \lvert z \rvert e^{i \arg(z)}$	Arg[z]

بعض العمليات على الأعداد المركبة

ويقوم ماثيماتيكا بأجراء العمليات الجبرية على الأعداد المركبة من جمع وطرح وضرب وقسمة وكذلك يمكن حساب قيمة الجذر التربيعي والدوال الآسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية في حالة الأعداد المركبة .

حساب الجزر التربيعي للعدد التخيلى 4-
والناتج هو العدد التخيلى 2I

```
In[1]:=Sqrt[-4]
Out[1]=2I
```

حساب القيمة العددية للجذر التربيعي للعدد المركب 3+2I

```
In[2]:=Sqrt[3+2I]//N
Out[2]= 1.81735 + 0.550251 I
```

حساب القيمة العددية للدالة الآسية المركبة e^{2+7I}

```
In[3]:=Exp[2+7I]//N
Out[3]=5.57063 + 4.85451 I
```

حساب قيمة log(-2)
ونلاحظ أن الناتج يكون عدد مركب

```
In[4]:=Log[-2]
Out[4]:=I Pi + Log[2]
```

ولحساب القيمة العددية للمقدار المركب log(-2)

```
-In[5]:=Log[
2]//N
Out[5]=0.693147 + 3.14159 I
```

حساب القيمة العددية للدالة اللوغاريتمية المركبة log(3+4I)

```
In[6]:=Log[3+4I]//N
Out[6]=1.60944 + 0.927295 I
```

لحساب القيمة المطلقة للعدد المركب 2 + 3 I

```
In[7]:=Abs[2+3I]
Out[7]= Sqrt[13]
```

وحساب القيمة العددية لدالة القيمة المطلقة $|2 + 3 I|$

```
In[8]:=Abs[2+3I]//N
Out[8]=3.60555
```

لتعريف الأعداد المركبة z1 , z2

```
In[9]:=z1=3+5I;z2=4-6I;
```

لحساب مجموع العددان المركبان z1 + z2

```
In[10]:=z1+z2
Out[10]=7 - I
```

لحساب حاصل ضرب العددان المركبان z1 x z2

```
In[11]:=z1 z2
Out[11]=42 + 2 I
```

لحساب خارج قسمة العددان المركبان $\frac{z1}{z2}$

```
In[12]:=z1/z2
```

$$Out[12]=-\frac{9}{26}+\frac{19}{26}\ I$$

لحساب قيمة عددية لخارج قسمة العددان المركبان

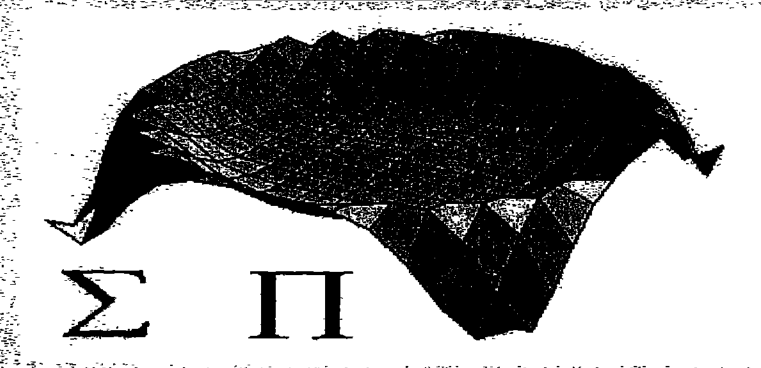
```
In[13]:=z1/z2//N
Out[13]=-0.346154 + 0.730769 I
```

لحساب سعة العدد المركب z1

```
In[14]:=Arg[z1]//N
Out[14]=1.03038
```

الباب الثالث

ماثيماتيكا والجبر



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials & Rational Functions

٢ . المتسلسلات Series

٣ . حل المعادلات Solving Equations

٤ . الجبر الخطي Linear Algebra

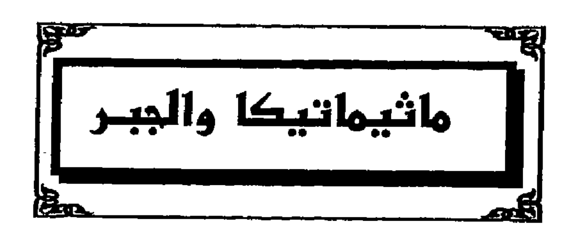
أولا : القوائم Lists

ثانيا : المصفوفات Matrices

ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

الباب الثالث



من الأشياء الهامة فى برنامج ماثيماتيكا هو المقدرة على القيام بالحسابات على المقـــادير الرمزية Symbolic الى جانب المقادير العددية Numeric وهذا يعنى أن ماثيماتيكا يســـتطيع التعامل مع الصيغ والمقادير الجبرية تماما مثل التعامل مع الأعداد .

١ ـ كثيرات الحدود والدوال الكسرية
Polynomials and Rational Functions

برنامج ماثيماتيكا يقدم عدد كبير من الأوامر للتحويل بين الأشكال المختلفـــة للتعبـــيرات الجبرية وأجراء العمليات الجبرية على كثيرات الحدود Polynomials وسوف نتعرف فيما يأتي على بعض هذه الأوامر مع توضيح الوظيفة والصيغة العامة لكل من هذه الأوامر ونعطـــى أمثلة توضيحية .

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تحليل كثيرة الحدود **Poly** الى قوى صحيحة	**Factor[poly]**
إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى البسط للتعبير **expr**	**Expand[expr]**
إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى كل أجزاء التعبير **expr**	**ExpandAl[expr]**
توحيد المقامات **denominators** للكسور الموجودة فى التعبير **expr**	**Together[expr]**
كتابة التعبير الكسرى **expr** على صورة مجموع لكسوره الجزئية	**Apart[expr]**
إيجاد صورة مبسطة للتعبير **expr** بأصغر عدد ممكن من الأجزاء	**Simplify[expr]**
تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى **x** فى التعبير **expr**	**Collect[expr,x]**

لتحليل كثيرة الحدود $x^2 + 2x - 3$ إلى عواملها

```
In[1]:=Factor[x^2+2x-3]
Out[1]= (x+3)(x-1)
```

الأمر **Expand** هو عكس الأمر **Factor** ويقوم بفك الأقواس

```
In[2]:=Expand[%]
```

Out[2]= $x^2 + 2x - 3$

لتحليل كثيرة الحدود $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ إلى عواملها

```
In[3]:=Factor[8x^3+36x^2+54x+27]
```

Out[3]= $(3 + 2x)^3$

تعريف المقدار الجبرى **rrr** ثم إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود فى البسط للمقدار الجبرى **rrr**

```
In[4]:=rrr=(x-1)^2 (x+2)/((x+1)(x-3)^2);Expand[rrr]
```

Out[4]= $\frac{2}{(-3+x)^2(1+x)} - \frac{3x}{(-3+x)^2(1+x)} + \frac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

توحيد المقامات للكسور الموجودة فى المقدار الجبرى الناتج من جملة الإخراج السابقة

In[5]:=Together[%]

Out[5]: $\frac{2-3x+x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود فى كل المقدار الجبرى rrr

In[6]:=ExpandAll[rrr]

Out[6]= $\frac{2}{9+3x-5x\verb|^|2+x\verb|^|3}-\frac{3x}{9+3x-5x\verb|^|2+x\verb|^|3}+\frac{x^3}{9+3x-5x\verb|^|2+x\verb|^|3}$

كتابة المقـــــدار الجبرى rrr فى صورة كسوره الجزئية

In[7]:=Apart[rrr]

Out[7]= $1+\frac{5}{(-3+x)^2}+\frac{19}{4(-3+x)}+\frac{1}{4(1+x)}$

تبسيط شكل الناتج من جملة الإخراج السابقة Out[7]

In[8]:=Simplify[%7]

Out[8]= $\frac{(-1+x)^2(2+x)}{9+3x-5x\verb|^|2+x\verb|^|3}$

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قــوى x فــى التعبير expr	Collect[expr, x]
الحصول على معامل form فى كثيرة الحــــدود expr	Coefficient[expr, form]
الحصول على عدد العناصر الموجودة فــى التعبــير expr	Length[expr]
الحصول على اكبر قوى للمقدار form فى التعبير expr	Exponent[expr,form]

إيجاد مفكوك المقدار الجبرى $(2x + y + 1)^2$ ووضع الناتج فى المتغير r1

```
In[9]:=r1=Expand[(2x+y+1)^2]
```

Out[9]= $1 + 4 x + 4 x^2 + 2 y + 4 x y + y^2$

تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى المتغير y فى التعبير الجبرى r1

```
In[10]:=Collect[r1,y]
```

Out[10]= $1 + 4 x + 4 x^2 + (2 + 4 x) y + y^2$

للحصول على معامل y فى التعبير الجبرى r1

```
In[11]:=Coefficient[r1,y]
```

Out[11]=$2 + 4 x$

للحصول على أكبر قوى للمتغير y فى التعبير الجبرى r1

```
In[12]:=Exponent[r1,y]
```

Out[12]=2

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Numerator[expr]	الحصول على البسط فى التعبير **expr**
Denominator[expr]	الحصول على المقام فى التعبير **expr**
PolynomialQuotient[p, q, x]	إيجاد خارج قسمة **p** على **q** مع إهمال الجزء الباقى حيث **p , q** كثيرات حدود فى المتغير **x**
PolynomialRemainder[p, q, x]	إيجاد الجزء الباقى من خارج قسمة **p** علـــى **q** حيث **q , p** كثيرات حدود فى المتغير **x**

للحصول على البسط فى التعبير الجبرى rrr

In[13]:=Numerator[rrr]
Out[13]=$(-1+x)^2$ (2+x)

للحصول علىالمقام فى التعبير الجبرى rrr

In[14]:=Denominator[rrr]
Out[14]=$(-3+x)^2$ (1+x)

تعريف كثيرتى حدود p,q ثم
إيجاد خارج قسمة كثيرة الحدود p على
كثيرة الحدود q مع إهمال الجزء الباقى

In[15]:= p=x^3+5x^2+4x-6;q=x+1;
PolynomialQuotient[p,q,x]
Out[15]=4x^2 +x

للحصول على الجزء الباقى من خارج قسمة
كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q

In[16]:=PolynomialRemainder[p,q,x]
Out[16]= -6

٢ . المتسلسلات Series

فى كثير من المسائل الرياضية تنشأ عمليات جمع وضرب للحدود المنتظمة وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب مثل هذه العمليات . ولحساب مجموع حدود المتسلسلة يستخدم الأمر Sum كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب المجموع $\sum_{i=1}^{i\,max} f$	Sum[f, {i, imax}]
حساب المجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$	Sum[f, {i, imin, imax}]
حساب المجموع $\sum_{i} f$ من i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step	Sum[f, {i,imin, imax, step}]
حساب المجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} \sum_{j=j\,min}^{j\,max} f$	Sum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, . . .]

لحساب مجموع العشرة حدود الأولى من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$

```
In[1]:= Sum[1/i^2,{i,1,10}]//N
Out[1]=1.54977
```

ويمكن حســـــاب مجموع عدد لانهائى من المتسلسلة بشرط أن تكون المتسلسلة تقاربية

```
In[2]:= Sum[i/I^2,{i,1,Infinity}]//N
Out[2]= 1.64493
```

لحساب المجموع $\sum_{i=1}^{7} \frac{x^i}{i!}$

```
In[3]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}
```

Out[3]= $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب مجموع $\sum \frac{x^i}{i!}$ من i=2 الى i=7

بخطوة step=2

```
In[4]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]
```

Out[4]= $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب المجموع المزدوج $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} x^i y^j$

```
In[5]:=Sum[x^i y^j,{i,1,3},{j,1,i}]
```

Out[5]= $xy+x^2y+x^2y^2+x^3y+x^3y^2+x^3y^3$

ويمكن لماثيماتيكا أجراء عمليات الضرب على الحدود المنتظمـــة باســتخدام الأمــر Product كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Product[f,{i, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax, step}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$ بخطوة مقدارها step
Product[f,{i,imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	حساب حاصل الضرب المزدوج $\prod_{i=imin}^{imax} \prod_{j=jmin}^{jmax} f$

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5} i^2$

```
In[6]:=Product[i^2,{i,1,5}]
Out[6]=14400
```

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{4} (x+i)$

```
In[7]:=Product[x+i,{i,1,4}]
Out[7]=(1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x)
```

لحساب حاصل $\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{i} (x+i)^j$

```
In[8]:=Product[(x+i)^j,{i,1,3},{j,1,i}]
```

Out[8]=$(1 + x) (2 + x)^3 (3 + x)^6$

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حســـــاب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x= x_0$ لآي عدد n من الحدود وكذلك حساب مفكوك تيلور لدالة فـــى متغـــيرين $f(x,y)$ حول النقطة (x_0, y_0) وذلك باستخدام الأمر Series كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مفكوك متسلســـلة القوى للدالة f حول النقطة x_0 حتى الحد $(x-x_0)^n$	Series[f, {x, x0, n}]
حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة f علـــى التتابع بالنسبة الى y ثم الى x	Series[f, {x, x0, nx}, {y,y0, ny}]
تحويل expr الى الشكل العادى بدون أي رموز خاصة	Normal[expr]

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ حتى الحدود من الدرجـــة الثالثة

In[9]:=Series[f[x],{x,a,3}]

Out[9]=

$$f[a]+f'[a](-a+x)+\frac{f''[a](-a+x)^2}{2}+\frac{f^{(3)}[a](-a+x)^3}{6}+O[-a+x]^4$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^x حول النقطة $x = 0$ حتى الحدود من الدرجة الرابعة

In[10]:=Series[Exp[x],{x,0,4}]

$$Out[10]=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$$

ويمكن إلغاء الحد $O[x]^5$ وكتابة المفكوك فى الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر Normal

In[11]:=Normal[%]

$$Out[11]= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^{xy} حول النقطة $x = 0$, $y = 0$ حتى الحدود من الدرجة الثالثة فى x والدرجة الثانية فى y

In[12]:=Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]

$$Out[12]=1+(y+O[y]^3)x+(\frac{y^2}{2}+O[y]^3)x^2+O[x]^3$$

ويمكن كتابة المفكوك فى الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر Normal

In[13]:=Normal[Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]]

$$Out[13]=1+xy+\frac{x^2y^2}{2}$$

٣ . حل المعادلات Solving Equations

فى برنامج ماثيماتيكا المعادلة يكون لها الشكل **lhs == rhs** حيث يستخدم المؤثــــر العلاقى == وهو يعنى اختبار ما إذا كان الطرف الأيمن **rhs** يساوى الطرف الأيســــر **lhs** ولذلك فإن المعادلات فى ماثيماتيكا تعامل على أنها تعبيرات منطقية **Logical Statement** .

فمثلا عند إدخال المعادلة 2+3==5 فإن الناتج يكون صواب **True**

In[1] := 2+3= =5
Out[1]= True

وعند إدخال المعادلة $x^2+3x==2$ فإن ماثيماتيكا يقوم بإخراج المعادلة فى صورة رمزية لأنه لم يستطع اختبار ما إذا كان $x^2+3x=2$ صواب أو خطأ نظرا لعـــدم وجـــود قيمـــة ســـابقة للمتغير x .

In[2] := x^2+3x= =2
Out[2]= $x^2+3x==2$

والآن لحل المعادلة والحصول على قيم x التى تمثل جذور المعادلة نســـتخدم الأمــر **Roots** كالآتي :

Roots[lhs= =rhs,var]	للحصول على قائمة تحتوى على جذور المعادلة **lhs= =rhs** بالنسبة للمتغير **var** .

الحصول على جذور المعادلة $x^2+3x==2$ ونلاحظ أن الناتج يكون على صورة تعبير منطقى

```
In[3]:=Roots[x^2+3x= =2,x]
Out[3]=
```

$$x=\frac{-3-Sqrt[17]}{2} \;\|\; x=\frac{-3+Sqrt[17]}{2}$$

وكثيرا ما نحتاج الى استخدام الحل الناتج فى حسابات أخرى لذلك يكون من المفيد تحويل الحـــل من التعبير المنطقى الى صورة صريحة ويتم ذلك باستخدام الدالة ToRules

ToRules[eqns] لتحويل حل eqns الناتج من الأمر Roots من الصورة المنطقية الى متتابعة من القوائم تحتوى على قواعد صريحة للحل

{ToRules[eqns]} لتحويل حل eqns الناتج من الأمر Roots من الصورة المنطقية الى قائمة تحتوى على قواعد صريحة للحل

لتحويل الحل الناتج من جملة 3 . الى متتابعة تحتوى على قواعد صريحة للحل

```
In[4]:=ToRules[%3]
Out[4]=
```

$$Sequence[\{x->\frac{-3-Sqrt[17]}{2}\},\{x->\frac{-3+Sqrt[17]}{2}\}]$$

ولتحويل الكسور الاعتيادية فى الحل إلى كسور عشرية والحصول على قيم عددية نستخدم الدالة N

```
In[5]:={ToRules[Roots[x^2+3x= =2,x]]}// N
Out[5]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}
```

ويمكن حل المعادلة والحصول على جذورها باستخدام الأمر Solve كالآتي :

Solve[eqn, var]	لحل المعادلة eqn بالنسبة للمتغير var

وتعتبر معادلات كثيرات الحدود polynomial equations من أهم المعادلات التي يتم حلها باستخدام الأمر Solve .

للحصول على جذور المعادلة $x^2 + 3x = 2$ بالنسبة للمتغير x

In[6]:=Solve[x^2+3x= =2,x]

$$Out[6]= \{x->\frac{-3 - Sqrt[17]}{2}\},\{x->\frac{-3 + Sqrt[17]}{2}\}$$

لحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 6

In[7]:= N[%6]

Out[7]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}

للحصول على جذور المعادلة $a\,x + b = c$ بالنسبة للمتغير x

In[8]:=Solve[a x+b= =c,x]

$$Out[8]= \{\{x -> -(\frac{b-c}{a})\}\}$$

للحصول على جذور المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[9]:=Solve[a x^2+b x+c==0,x]

$$Out[9]= \left\{\left\{x->\frac{-b-Sqrt[b^2-4ac]}{2a}\right\},\left\{x->\frac{-b+Sqrt[b^2-4ac]}{2a}\right\}\right\}$$

للحصول على جـــــذور المعـــــادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[10]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x]

$$Out[10]=\{\{x->-2\},\{x->\frac{-1-ISqrt[3]}{2}\},\{x->\frac{-1+ISqrt[3]}{2}\}\}$$

ولحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 10

In[11]:=N[%]
Out[11]={{x -> -2.}, {x -> -0.5 - 0.866025 I}, {x -> -0.5 + 0.866025 I}}

ويمكن الحصول على جذور معينة من حل المعادلة باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

In[12]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[1]] للحصول على الجذر الأول من حل

Out[12]={x -> -2} المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[13]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[2]]//N للحصول على قيمة عددية للجذر

Out[13]={x -> -0.5 - 0.866025 I} الثاني من حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

والأمر Solve قادر على إيجاد حلول جبرية صريحة للعديد من معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية خاصة المعادلات التي يمكن تحليلها

```
In[14]:=equ1=Expand[Product[x-i,{i,5}]]
```
تعريف كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

Out[14]=$-120 + 274 x - 225 x^2 + 85 x^3 - 15 x^4 + x^5$

```
In[15]:=Solve[equ1= =0,x]
```
حل معادلة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

```
Out[15]={{x -> 1}, {x -> 2}, {x -> 3}, {x -> 4}, {x -> 5}}
```

نلاحظ أننا حصلنا على حل صريح لمعادلة كثيرة الحدود equ1=0 من الدرجة الخامسة . وإذا كان ماثيماتيكا قادر على إيجاد حلول معادلة كثيرة حدود من درجة n فإنه يعطى n من الجذور حتى فى حالة وجود جذور مكررة كما فى المثال الآتي :

```
In[16]:=Solve[(x+3)(x-1)^2= =0,x]
Out[16]={{x -> -3}, {x -> 1}, {x -> 1}}
```

وفى حالة عدم استطاعة ماثيماتيكا الحصول على حلول جبرية صريحة فإن ماثيماتيكا تترك المعادلة فى صورتها الرمزية ويمكن فى هذه الحالة استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية

```
In[17]:=Solve[x^5-130x+11= =0,x]
```
Out[17]={ToRules[Roots[$-130 x + x^5$ == -11, x]]}

```
In[18]:= Solve[x^5-130x+11= =0,x]//N
Out[18]={{x -> -3.39748}, {x -> -0.0211456 - 3.37698 I},
        {x -> -0.0211456 + 3.37698 I}, {x -> 0.0846154}, {x -> 3.35515}}
```

وفى ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل بعض المعادلات التى ليست على صورة كثيرات حدود

```
In[19]:=Solve[Sqrt[1-x]+Sqrt[1+x]= =4,x]//N
Out[19]={{x -> -6.9282 I}, {x -> 6.9282 I}}
```

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل مجموعة من المعادلات فى وقت واحد كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة فيها حيث eqns تكتب فى صورة قائمة {lhs1= =rhs1,lhs2= =rhs2,...}	Solve[eqns]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars حيث vars تكتب فى صورة قائمة {x1,x2,...}	Solve[eqns,vars]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars فقط وحذف المتغيرات elims من النتائج	Solve[eqns, vars, elims]

لحل المعادلتين بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة وهى x , y

```
In[20]:=Solve[{x+y= =1,x-3y= =2}]
```

Out[20]= $\{\{x->\frac{5}{4}, y->-\frac{1}{4}\}\}$

للحصول على قيمة عددية لحل المعادلتين بالنسبةإلى جميع المتغيرات

```
In[21]:=Solve[{x^2+y^2= =5,x+3y= =1}]//N
Out[21]={{x -> -2., y -> 1.}, {x -> 2.2, y -> -0.4}}
```

تعريف القائمة **eqns1** وتحتوى على معادلتين فى ثلاث مجاهيل هم **x , y , z** ثم حساب الحل بالنسبة الى **x , y** فقط

```
In[22]:=eqns1={y-2x= =9,x+3z= =1}; Solve[eqns1,{x,y}]
Out[22]={{y -> 9 - 2 (-1 + 3 z), x -> 1 - 3 z}
```

حساب حل مجموعة المعادلات **eqns1** بالنسبة الى **y , z** فقط

```
In[23]:=Solve[eqns1,{y,z}]
```

Out[23]={{y -> 9 + 2 x, z -> $\frac{1 - x}{3}$ }}

تعريف القائمة **eqns2** وتحتوى على ثلاث معادلات فى خمسة مجاهيل هم **x , y , z , w , t** ثم حساب الحل بالنسبة الى المتغيرات **x , y , z** فقط

```
In[24]:=eqns2={x+2y= =z,y+2z= =w,z+2w= =t};
        Solve[eqns2,{x,y,z}]

Out[24]={{x -> t - 2 w + 2 (-w - 2 (-t + 2 w)),
          y -> w + 2 (-t + 2 w), z -> t - 2 w}}
```

حساب حل مجموعة المعادلات **eqns1** بالنسبة الىالمتغير **x** مع حذف المتغير **z**

```
In[25]:=Solve[eqns1,{x},{z}]
```

Out[25]={{x-> $\frac{-9 + y}{2}$}}

حساب حل مجموعة **eqns1** بالنسبة إلى المتغير **y** مع حذف المتغير **z**

```
In[26]:=Solve[eqns1,{y},{z}]
Out[26]={{y -> 9 + 2 x}}
```

حساب حل مجموعة المعادلات eqns2 بالنسبة إلى المتغير x مع حذف المتغيرات t,w

```
In[27]:=Solve[eqns2,{x},{t,w}]
Out[27]={{x -> -2 y + z}}
```

حساب حل مجموعة المعادلات eqns2 بالنسبة إلى المتغير w مع حذف المتغيرات x,y

In[28]:=Solve[eqns2,{w},{x,y}]

Out[28]= $\{\{w->\frac{t-z}{2}\}\}$

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن حذف عدد من المتغيرات من مجموعة المعادلات وإعـــادة كتابتهـــا ويتم ذلك باستخدام الأمر Eliminate كالآتي :

Eliminate[eqns,elims]	لحذف المتغيرات elims من مجموعة المعادلات eqns

لحذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

```
In[29]:=Eliminate[eqns1,x]
Out[29]=y = = 11 - 6 z
```

لحذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

```
In[30]:=Eliminate[eqns1,z]
Out[30]=y = = 9 + 2 x
```

لحذف المتغيرات x,y من مجموعة المعادلات eqns2

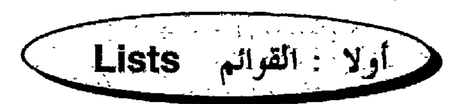
```
In[31]:= Eliminate[eqns2,{x,y}]
Out[31]=t = = 2 w + z
```

لحذف المتغيرات w,t من مجموعة المعادلات eqns2

```
In[32]:=Eliminate[eqns2,{w,t}]
Out[32]=x = = -2 y + z
```

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

يعتبر الجبر الخطى جزء اساسى وهام فى دراسة الرياضيات والهندسة والفيزياء وعلوم أخرى ، وبرنامج ماثيماتيكا يقدم العديد من الأوامر للعمليات الجبرية الخاصة بالتعامل مع القوائم Lists والمصفوفات Matrices وحلول الأنظمة الخطية Linear Systems وحساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة .



من خلال دراستنا للعديد من الأوامر فى ماثيماتيكا مثل

Sum , Product , Series , ...

نلاحظ أن نطاق العمل فى هذه الأوامر يكتب باستخدام الأقواس { } على صورة قائمة List وتستخدم القوائم فى ماثيماتيكا بشكل كبير وبصفة خاصة عند عمل الحسابات عندما يكون هناك حاجة لتنظيم عدد كبير من القيم بغرض التعامل معها كوحدة واحدة ولذلك فإن ماثيماتيكا غنى بالعمليات التى يمكن تنفيذها على القوائم ، ولكى نتعرف على هذه العمليات نبدأ بتعريف قائمتين s1 , s2 كل قائمة تحتوى على خمسة عناصر

```
In[1]:=s1= { a , b , c , d , e }; s2= { 2 , 3 , 4 , 5 , 6};
```

وتنفيذ العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة على قائمتين يتم على العناصر المتناظرة فى القائمتين بشرط أن يكون القائمتين بهما نفس العدد من العناصر وناتج العملية الحسابية يكون قائمة جديدة .

جمع القائمتين s1 , s2 يتم بجمع العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[2]:= s1+s2
Out[2]={2 + a , 3 + b , 4 + c , 5 + d , 6 + e}
```

طرح القائمتين s1 , s2 يتم بطرح العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[3]:= s1-s2
Out[3]={-2 + a, -3 + b, -4 + c, -5 + d, -6 + e}
```

ضرب القائمتين s1 , s2 يتم بضرب العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[4]:=s1 s2
Out[4]={2 a, 3 b, 4 c, 5 d, 6 e}
```

قسمة القائمتين s1 , s2 يتم بقسمة العناصر المتناظرة فى القائمتين

In[5]:=s1/ s2

Out[5]= $\{\frac{a}{2},\frac{b}{3},\frac{c}{4},\frac{d}{5},\frac{e}{6}\}$

ويمكن إجراء أي عملية حسابية بين قائمة وعدد ثابت فمثلا جمع القائمة s1 على العدد الثابت 2 يتم بإضافة العدد الثابت 2 الى كل عنصر فى القائمة

```
In[6]:= s1+2
Out[6]: {a+2 , b+2 , c+2 , d+2 , e+2}
```

ضرب القائمة s1 فى العدد الثابت 3 يتم بضرب العدد الثابت 3 فى كل عنصر من القائمة

```
In[7]:=3s1
Out[7]= {3 a, 3 b, 3 c, 3 d, 3 e}
```

ويمكن رفع القائمة الى أس عددى حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الى هذا الأس العددى

```
In[8]:=s2^2
Out[8]={4,9,16,25,36}
```

ويمكن رفع أي قيمة عددية الى أس عبارة عن قائمة

In[9]:= 2^s1

Out[9]= $\{ 2^a, 2^b, 2^c, 2^d, 2^e \}$

ويمكن رفع قائمة الى أس عبارة عن قائمة أخرى

In[10]:=s1^s2

حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الأساس الى أس يساوى العنصر المناظر له فى القائمة الأس

Out[10]= $\{a^2, b^3, c^4, d^5, e^6\}$

ويمكن تطبيق الدوال على القوائم حيث يتم تطبيق الدالة على كل عنصر فى القائمة

إيجاد الجذر التربيعى للقائمة s2 حيث يتم حساب الجذر التربيعى لكل عنصر فى القائمة

In[11]:=Sqrt[s2]//N
Out[11]= {1.41421, 1.73205, 2., 2.23607, 2.44949}

تطبيق دالة الجيب sin على القائمة s2

In[12]:=Sin[s2]//N
Out[12]={0.909297, 0.14112, -0.756802, -0.958924, -0.279415}

وماثيماتيكا قادر على أجراء عمليات الفئات Sets على القوائم من خلال العديد من الأوامـــر والجدول الآتي يوضح بعض الأوامر المستخدمة .

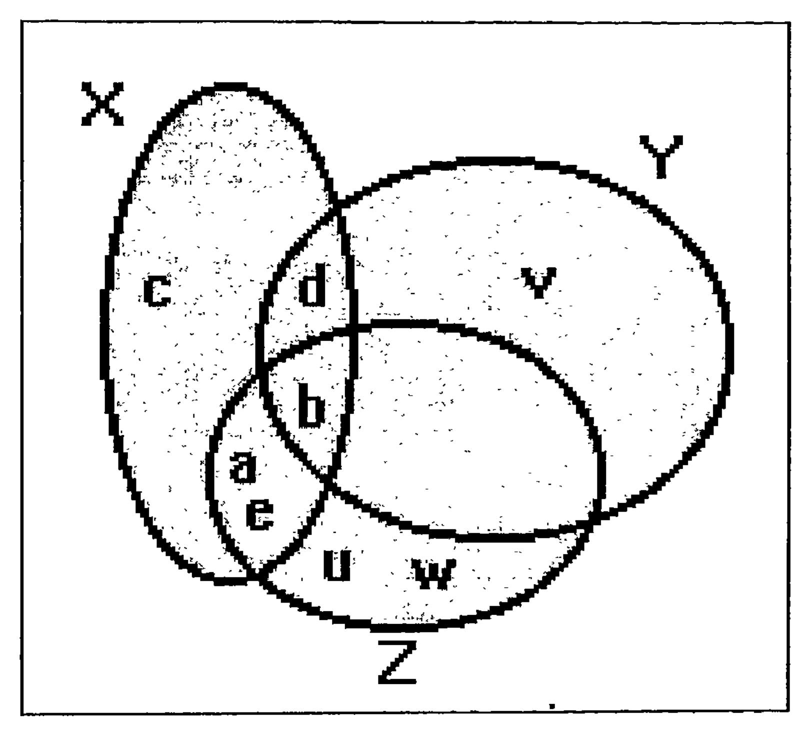
العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إيجاد عدد العناصر فى القائمة list	Length[list]
ترتيب عناصر القائمة list حيث يتم أولا ترتيـــب الأعداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا	Sort[list]
إضافة القوائم ... ,list1 , list2 على بعضها بحيـــث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يســـاوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة	Join[list1, list2, ...]
اتحاد الفئات $list1 \cup list2 \cup list3 \cup ...$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم	Union[list1, list2, ...]
تقاطع الفئات $list1 \cap list2 \cap list3 \cap ...$	Intersection[list1, list2, ...]
إيجاد مكملة الفئة eall بالنسبة للفئات , e1 , e2 ... أي إيجاد العناصر فى الفئـــة eall والغـــير موجودة فىالفئات ... , e1 , e2	Complement[eall, e1, e2, ...]
تجزئ القائمة list الى قوائم فرعية متباعدة كل منها يحتوى على n من العناصر	Partition[list, n]

ولتوضيح أوامر الفئات نفرض القوائم X , Y , Z

In[13]:=X={a,b,c,d,e};Y={b,d,v};Z={a,b,e,u,w};

لمعرفة عدد العناصر فى X

In[14]:=Length[X]
Out[14]=5

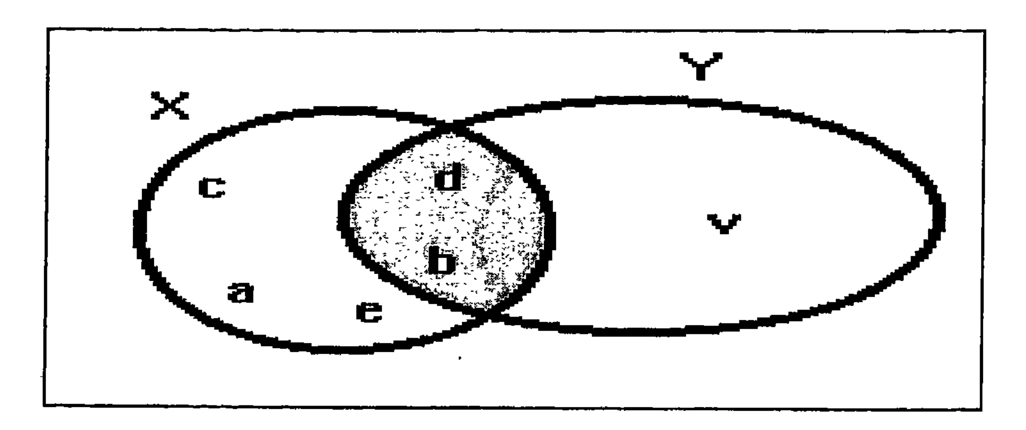


اضافة القوائم X , Y , Z معا بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة

In[15]:=Join[X,Y,Z]
Out[15]={a, b, c, d, e, b, d, v, a, b, e, u, w}

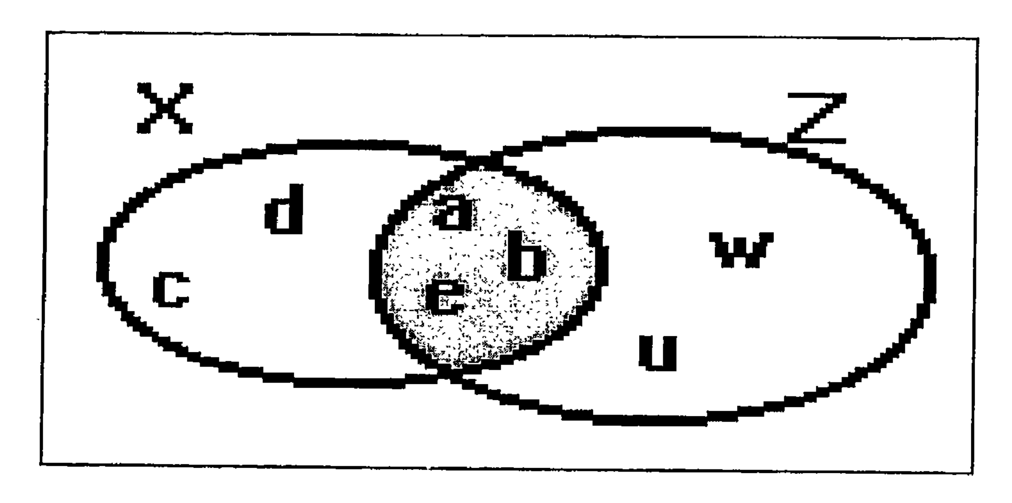
اتحاد الفئات $X \cup Y \cup Z$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم

In[16]:=Union[X,Y,Z]
Out[16]={a, b, c, d, e, u, v, w}



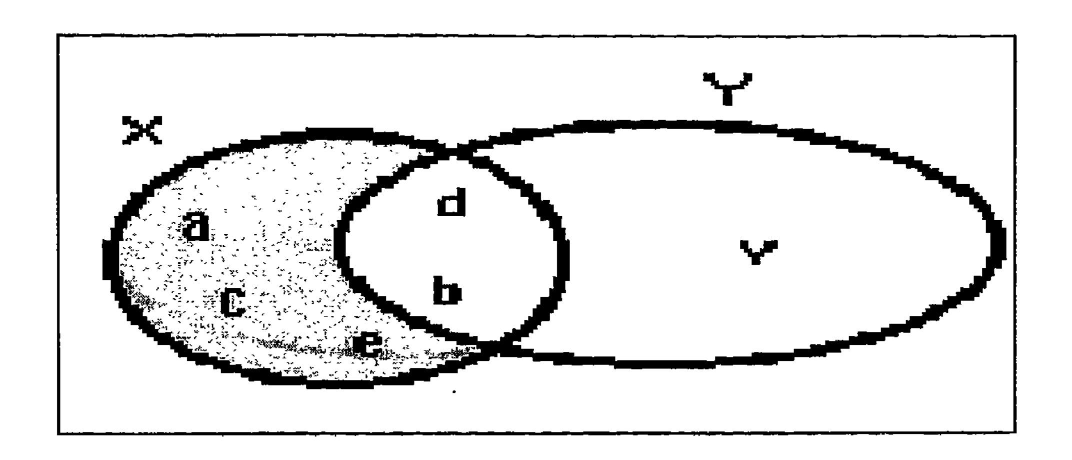
تقاطع الفئتان $X \cap Y$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Y

In[17]:=Intersection[X,Y]
Out[17]={b, d}



تقاطع الفئتان $X \cap Z$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Z

In[18]:=Intersection[X,Z]
Out[18]={a, b, e}



إيجاد مكملة الفئة X بالنسبة للفئة Y أي إيجاد العناصر فى الفئة X والغيرموجودة فىالفئة Y

In[19]:=Complement[X,Y]
Out[19]={a, c, e}

تجزئ الفئة Z الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصرين

In[20]:=Partition[Z,2]
Out[20]={{a, b}, {e, u}}

تجزئ الفئة Y الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصر واحد فقط

In[21]:=Partition[Y,1]
Out[21]={{b}, {d}, {v}}

ترتيب عناصر القائمة حيث يتم أولا ترتيب الأعـــداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا

In[22]:=Sort[{r,4,9,p,e,a,-7}]
Out[22]={-7, 4, 9, a, e, p, r}

ويمكن إضافة عناصر جديدة الى القوائم باستخدام الأوامر الآتية :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إضافة العنصر elem فى بداية القائمة list	Prepend[list, elem]
إضافة العنصر elem فى نهاية القائمة list	Append[list, elem]
إضافة العنصر elem الى القائمة list فى الموضع رقم n	Insert[list, elem, n]

تعريف القائمة rrr

In[23]:=rrr={a,b,c,d,e};

إضافة العنصر x فى بداية القائمة rrr

In[24]:=Prepend[rrr,x]
Out[24]={x, a, b, c, d, e}

إضافة العنصر y إلى نهاية القائمة rrr

In[25]:=Append[rrr,y]]
Out[25]={a, b, c, d, e, y}

إدخال العنصر z فى الموضع رقم 2 من القائمة rrr

In[26]:=Insert[rrr,z,2]
Out[26]={a, z, b, c, d, e}

ويمكن حذف عناصر من القوائم باستخدام الأمر Drop كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حذف n من العناصر من بداية القائمة list	Drop[list, n]
حذف n من العناصر من نهاية القائمة list	Drop[list, -n]
حذف العنصر رقم n من القائمة list	Drop[list,{n}]
حذف عناصر من القائمة list ابتداء من العنصر رقم m الى العنصر رقم n	Drop[list, {m, n}]

حذف ثلاثة عناصر من بداية القائمة rl

```
In[27]:=r1={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7};
        Drop[r1,3]
Out[27]={a4, a5, a6, a7}
```

حذف عنصران من نهاية القائمة rl

```
In[28]:=Drop[r1,-2]
Out[28]={a1, a2, a3, a4, a5}
```

حذف العنصر الرابع من القائمة rl

```
In[29]:=Drop[r1,{4}]
Out[29]={a1, a2, a3, a5, a6, a7}
```

حذف العناصر من العنصر الثالث الى العنصر السادس من القائمة rl

```
In[30]:=Drop[r1,{3,6}]
Out[30]={a1, a2, a7}
```

ويمكن تحديد عناصر معينة من القائمة وذلك باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

لتحديد العنصر الرابع من القائمة r1

```
In[31]:=r1[[4]]
Out[31]=a4
```

ولتحديد العنصران الرابع والسادس من القائمة r1

```
In[32]:=r1[[{4,6}]]
Out[32]={a4, a6}
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن توليد قوائم بناء على مواصفات نحددها له وذلك باستخدام الأمر **Table** كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
عمل قائمة تحتوى على نسخ من expr عددها imax	Table[expr, {imax}]
عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=1 حتى i=imax	Table[expr, {i, imax}]
عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax	Table[expr, {i, imin,imax}]
عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax بخطوة step مقدارها di	Table[expr, {i, imin, imax, di}]
عمل جدول من القوائم يحتوى على قيم expr في اكثر من بعد i , j , ...	Table[expr,{i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]
كتابة القائمة list في الشكل التقليدى للمصفوفة	TableForm[list]

*ولتوضيح عمل الأمر **Table** نعطى الأمثلة الآتية :*

لتوليد قائمة تحتوى على أربعة نسخ من الرمز x

```
In[33]:=Table[x,{4}]
Out[33]= {x, x, x, x}
```

لتوليد قائمة تحتوى على خمسة أعداد عشوائية فى الفترة [0,1]

```
In[34]:=Table[Random[],5]
Out[34]=
{0.803812, 0.152706, 0.0624843, 0.59723, 0.192153}
```

لتوليد قائمة تحتوى على قيم i^2 من i=1 الى i=7

```
In[35]:=Table[i^2,{i,7}]
Out[35]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}
```

لتوليد قائمة تحتوى على المقدار الجبرى x^i+2ix من i=3 الى i = 6

```
In[36]:=Table[x^i + 2i x,{i,3,6}]
Out[36]=
```

$\{6x + x^3, 8x + x^4, 10x + x^5, 12x + x^6\}$

لتوليد قائمة عناصرها هى مكعبات الأعداد الزوجية المحصورة بين 8 , 2

```
In[37]:=Table[i^3 ,{i,2,8,2}]
Out[37]= {8, 64, 216, 512}
```

لتوليد قائمة m تحتوى على قيم i^2 + 2j حيث i=1,2,3 & j=2,3,4,5

```
In[38]:=m=Table[i^2+2j,{i,3},{j,2,5}]
Out[38]:=
{{5, 7, 9, 11}, {8, 10, 12, 14}, {13, 15, 17, 19}}
```

ولعرض القائمة m فى صورة جدول

```
In[39]:= TableForm[m]
Out[39]= 5   7   9   11
         8   10  12  14
         13  15  17  19
```

ثانيا : المصفوفات Matrices

المصفوفات والعمليات الخاصة بها تستخدم بشكل كبير فى الرياضيات ويمكن الاستفادة من ماثيماتيكا فى إجراء العمليات الرياضية الخاصة بالمصفوفات والتى كانت تستغرق الكثير من الوقت خاصة إذا كانت المصفوفات من أبعاد كبيرة . والمصفوفات فى ماثيماتيكا عبارة عن قوائم من قوائم lists of lists فمثلا

- القائمة {a,b,c} تمثل المتجه (a,b,c) وهى مصفوفة من صف واحد وثلاثة اعمدة
- والقائمة {{a,b},{c,d}} تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وعمودين
- والقائمة $\{\{a_1,a_2,a_3\},\{b_1,b_2,b_3\}\}$ تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وثلاثة اعمدة وهكذا ،

وبالتالى فانه يمكن إدخال عناصر المصفوفة بصورة القوائم ، ويحتوى ماثيماتيكا على الأوامر Table , Array والخاصة بتكوين مصفوفات ذات أبعاد مختلفة والأمر Table هو الأكثر استخداما .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Table[f,{i,m},{j,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn حيث m تمثل عدد الصفوف ، n تمثل عدد الأعمدة ، f تمثل دالة فى i,j لتوليد عناصر المصفوفة
Array[f, n]	تكوين مصفوفة على شكل صف به n من العناصر على الصورة f[i]
Array[f, {m,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn على الصورة {f[i,j]} حيث f[i,j] يمثل العنصر فى الصف i والعمود j
MatrixForm[list]	طباعة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة

وفى ماثيماتيكا يمكن اجراء العمليات الحسابية من جمـــع وطـــرح وضـــرب علـــى المصفوفات ولتوضيح ذلك

تكوين مصفوفة على شكل صف به 6 عناصر

```
In[1]:= Array[h,6]
Out[1]={h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6]}
```

تكوين مصفوفة 2x2 عناصرها على صورة aij

```
In[2]:=Array[a,{2,2}]
Out[2]={{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}
```

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على الصورة $f_{ij} = 10\,i + j$ ثم عرض الناتـــج في الشـــكل التقليدى للمصفوفة

```
In[3]:=f=Table[10i+j,{i,3},{j,3}]
       ;MatrixForm[f]

Out[3]=  11  12  13
         21  22  23
         31  32  33
```

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على صورة m_{ij}

```
In[4]:=g=Array[m,{3,3}]

Out[4]={{m[1, 1], m[1, 2], m[1, 3]},
       {m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]},
       {m[3, 1], m[3, 2], m[3, 3]}}
```

حساب مجموع المصفوفتان g , f ثم عرض الناتـــــج فى الشــــكل التقليدى للمصفوفة

```
In[5]:=MatrixForm[f+g]

Out[5]= 11 + m[1, 1]    12 + m[1, 2]    13 + m[1, 3]
        21 + m[2, 1]    22 + m[2, 2]    23 + m[2, 3]
        31 + m[3, 1]    32 + m[3, 2]    33 + m[3, 3]
```

حساب حاصل طرح المصفوفتان g , f ثم عرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[6]:=MatrixForm[f-g]

Out[6]= 11 - m[1, 1]    12 - m[1, 2]    13 - m[1, 3]
        21 - m[2, 1]    22 - m[2, 2]    23 - m[2, 3]
        31 - m[3, 1]    32 - m[3, 2]    33 - m[3, 3]
```

حساب حاصل ضرب المصفوفة g فى العدد 5

```
In[7]:=5g

Out[7]={ { 5 m[1, 1] , 5 m[1, 2] , 5 m[1, 3] },
         { 5 m[2, 1] , 5 m[2, 2] , 5 m[2, 3] },
         { 5 m[3, 1] , 5 m[3, 2] , 5 m[3, 3] } }
```

حساب خارج قسمة المصفوفة g على 3

```
In[8]:= g/3
Out[8]=
```

$$\{\{\frac{m(1,1)}{3},\frac{m(1,2)}{3},\frac{m(1,3)}{3}\},\{\frac{m(2,1)}{3},\frac{m(2,2)}{3},\frac{m(2,3)}{3}\},\{\frac{m(3,1)}{3},\frac{m(3,2)}{3},\frac{m(3,3)}{3}\}\}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفتان g , f

```
In[9]:= f . g

Out[9]= {{11 m[1, 1] + 12 m[2, 1] + 13 m[3, 1],
          11 m[1, 2] + 12 m[2, 2] + 13 m[3, 2],
          11 m[1, 3] + 12 m[2, 3] + 13 m[3, 3]},
         {21 m[1, 1] + 22 m[2, 1] + 23 m[3, 1],
          21 m[1, 2] + 22 m[2, 2] + 23 m[3, 2],
          21 m[1, 3] + 22 m[2, 3] + 23 m[3, 3]},
         {31 m[1, 1] + 32 m[2, 1] + 33 m[3, 1],
          31 m[1, 2] + 32 m[2, 2] + 33 m[3, 2],
          31 m[1, 3] + 32 m[2, 3] + 33 m[3, 3]}}
```

تعريف المصفوفة f1 من رتبة 3x2 وتعريف المصفوفة f2 من رتبة 2x4 ثم حساب حاصل ضرب المصفوفتان f2 , f1 وعرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة.

```
In[10]:= f1={{2,-1},{1,0},{-3,4}};f2={{1,-2,3,0},{3,4,0,1}};
         MatrixForm[f1.f2]

Out[10]=   -1   -8    6   -1
            1   -2    3    0
            9   22   -9    4
```

وفى ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الأساسية على المصفوفات كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مدور المصفوفة m	Transpose[m]
حساب قيمة محدد المصفوفة m	Det[m]
حساب مصفوفة المحددات المصاحبة من رتبة kxk من المصفوفة m	Minors[m, k]
حساب معكوس المصفوفة المربعة m	Inverse[m]
حساب m^k	MatrixPower[m,k]

حساب مدور المصفوفة g ثم عرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[11]:=g1=Transpose[g];MatrixForm[g1]
Out[11]=  m[1, 1]   m[2, 1]   m[3, 1]
          m[1, 2]   m[2, 2]   m[3, 2]
          m[1, 3]   m[2, 3]   m[3, 3]
```

تعريف المصفوفة g2 من رتبة 2x2 ثم حساب قيمة المحدد

```
In[12]:=g2={{2,4},{1,7}};Det[g2]
Out[12]=10
```

حســــــــاب معكوس المصفوفة g2

In[13]:=Inverse[g2]

Out[13]= $\{\{\frac{7}{10}, -(\frac{2}{5})\}, \{-(\frac{1}{10}), \frac{1}{5}\}\}$

لحساب $(g2)^3$

In[14]:=MatrixPower[g2,3]

Out[14]={{52, 284}, {71, 407}}

تعريف المصفوفة g3 من رتبة 3x3 ثم حساب مصفوفة المـــحددات المصاحبة من رتبة 2x2 من المصفوفة g3

In[15]:=g3={{1,5,7},{2,4,3},{-1,6,0}}; Minors[g3,2]

Out[15]={{-6, -11, -13}, {11, 7, -42}, {16, 3, -18}}

حساب قيمة المحدد للمصفوفة g3

In[16]:=d=Det[g3] }}

Out[16]=279

حســــــــاب معكوس المصفوفة g3

In[17]:=Inverse[g3]

Out[17]=

$$\{\{-(\frac{18}{79}), \frac{42}{79}, -(\frac{13}{79})\}, \{-(\frac{3}{79}), \frac{7}{79}, \frac{11}{79}\}, \{\frac{16}{79}, -(\frac{11}{79}), -(\frac{6}{79})\}\}$$

f[i]	لتحديد الصف رقم i في المصفوفة f
f[[i,j]]	لتحديد العنصر f_{ij} بالصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة f
Sum[f[[i,i]],{i,n}]	لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة f من رتبة nxn
Transpose[f][[j]]	لتحديد العمود رقم j في المصفوفة f

تحديد الصف الثاني من المصفوفة g

```
In[18]:=g[[2]]
Out[18]={m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]}
```

لتحديد العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الأول في المصفوفة g

```
In[19]:=g[[3,1]]
Out[19]=m[3, 1]
```

لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة g

```
In[20]:=Sum[g[[i,i]],{i,3}]
Out[20]=m[1, 1] + m[2, 2] + m[3, 3]
```

لتحديد العمود الثالث من المصفوفة g

```
In[21]:=Transpose[g][[3]]
Out[21]={m[1, 3], m[2, 3], m[3, 3]}
```

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا تكوين مصفوفات من اشكال مختلفة كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر القائمة list توضع فى قطر المصفوفة وباقى العناصر أصفار	DiagonalMatrix[list]
تكوين مصفوفة الوحدة من البعد nxn	IdentityMatrix[n]
تكوين مصفوفة صفرية من البعد mxn	Table[0,{m},{n}]
تكوين مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular عناصرها فى أعلى القطر 1 وخلاف ذلك أصفار	Table[If[i<=j,1,0],{i,m},{j,n}]

تكوين مصفوفة قطرية من القائمة {a,b,c}

```
In[22]:=DiagonalMatrix[{a,b,c}]
Out[22]={{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}
```

تكوين مصفوفة الوحدة من البعد 3x3

```
In[23]:=IdentityMatrix[3]
Out[23]={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

تكوين مصفوفة صفرية من البعد 3x2

```
In[24]:=Table[0,{i,3},{j,2}]
Out[24]={{0,0},{0,0},{0,0}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية عليا من البعد 3x3

```
In[25]:=Table[If[i<=j,1,0],{i,3},{j,3}]
Out[25]={{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية سفلى من البعد 4x4

```
In[26]:=Table[If[i>=j,1,0],{i,4},{j,4}]
Out[26]=
{{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 1, 1, 0},{1, 1, 1, 1}}
```

لعرض المصفوفة الناتجة من جملة الإدخـــال In[26] فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[27]:=MatrixForm[%26]
Out[27]=  1   0   0   0
          1   1   0   0
          1   1   1   0
          1   1   1   1
```

ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

نظرية المعادلات الخطية linear equations تلعب دورا هاما فى الجبر الخطى , وفى الحقيقة فإن دراسة مسائل عديدة فى الجبر الخطى يتم تحويلها الى دراسة نظام من المعادلات الخطية . والمعادلة الخطية هى معادلة لها الصورة $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ حيث x_i تمثل متغيرات , a_i أعداد حقيقية وتمثل معاملات المتغيرات , b عدد حقيقى ويمثل الحد الثابت .

وكثيرا ما نحتاج الى إيجاد حلول أنظمة من المعادلات الخطية , وفى بعض الحالات يكون من الأفضل كتابة المعادلات ثم حلها باستخدام الأمر Solve وفى حالات أخرى يكون من المفيد تحويل نظام المعادلات الخطية الى شكل مصفوفات $m . x = b$ حيث x يمثل متجه المتغيرات , m يمثل مصفوفة المعاملات , b يمثل متجه الثوابت .

حل المعادلتين باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[1]:=Solve[{x+5y==1,2x+y==3},{x,y}]
```

$$Out[1]=\{\{x\text{->}\frac{14}{9}, y\text{->}-(\frac{1}{9})\}\}$$

تعريف المصفوفة matl من رتبة 3x3

```
In[2]:=mat1={{2,1,-2},{3,2,2},{5,4,3}}
Out[2]={{2, 1, -2}, {3, 2, 2}, {5, 4, 3}}
```

تكوين نظام من ثلاث معادلات

```
In[3]:=mat1.{x,y,z}=={10,1,4}
Out[3]={2 x + y - 2 z, 3 x + 2 y + 2 z,
        5 x + 4 y + 3 z} == {10, 1, 4}
```

حل نظام المعادلات باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[4]:=Solve[%,{x,y,z}]
Out[4]={{x -> 1, y -> 2, z -> -3}}
```

حل نظام المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة

```
In[5]:= {x,y,z}=Inverse[mat1].{10,1,4}
Out[5]={1, 2, -3}
```

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حل نظام المعادلات الخطية فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر LinearSolve كالآتي :

LinearSolve[m, b]	لايجاد متجه المتغيرات x الذى يحقق نظام المعادلات الخطية $m . x = b$

وعند التعامل مع مصفوفات من ابعاد كبيرة يكون من الافضل استخدام الأمر LinearSolve لحل نظام المعادلات .

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر LinearSolve يكون كالآتي:

```
In[6]:=LinearSolve[mat1,{10,1,4}]
Out[6]={1, 2, -3}
```

حيث mat1 هى مصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ فى نظام المعادلات المعرف فى جملة الإدخال In[3] والحل يكون

$$x = 1 \;,\; y = 2 \;,\; z = -3$$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[7]:=mat2={{1,2,-3},{2,-1,4},{4,3,-2}};
       LinearSolve[mat2,{6,2,14}]
Out[7]={2, 2, 0}
```

والحل يكون $x = 2 \ , \ y = 2 \ , \ z = 0$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[8]:=mat3={{1,-3,4,-2},{0,2,5,1},{0,1,-3,0}};
       LinearSolve[mat3,{5,2,4}]
```

$$\text{Out[8]=}\{\frac{157}{11},\frac{26}{11},-(\frac{6}{11}),0\}$$

ونلاحظ أن نظام المعادلات يتكون من ثلاثة معادلات فى أربعة مجاهيل وله عدد لا نهائى من الحلول لأنه تم حساب ثلاث مجاهيل بدلالة المجهول الرابع وناتج الحل يمثل حل نظام المعادلات بعد اخذ قيمة عددية للمجهول الرابع .

وإذا كان m مصفوفة مربعة فإننا نعلم من دراستنا في الجبر الخطى أن نظام المعادلات

$$m . x = b$$

يكون له حل وحيد لآي متجه ثوابت b إذا كان محدد المصفوفة m لا يساوى صفر بينما إذا كان محدد المصفوفة m يساوى صفر فهذا يعنى انه لا يوجد حل x يحقق نظام المعادلات m . x = b لقيمة خاصة للمتجه b وبمعنى آخر أن المعادلات تعتمد على بعضها dependent وفي هذه الحالة فإن مجموعة المتجهات x التي تحقق m . x = 0 تسمى الفراغ الصفرى nullspace للمصفوفة m أو kernel m وماثيماتيكا قادر على حساب متجهات الأساس Basis للفراغ الصفرى لمصفوفة وذلك باستخدام الأمر NullSpace كالآتي :

NullSpace[m]
لإيجاد متجهات أساس basis vectors جميع تركيباتها الخطية linear combinations تحقق المعادلة m . x = 0 حيث 0 هو المتجه الصفرى

محدد المصفوفة mat4 يساوى صفر

```
In[9]:=mat4={{1,2,1},{2,4,2},{3,6,3}}
          ;Det[mat4]
Out[9]=0
```

الدالة LinearSolve لا تستطيع إيجاد حل نظام المعادلات

```
In[10]:=LinearSolve[mat4,{a,b,c}]
Out[10]=LinearSolve::nosol:
  Linear equation encountered which has no solution.
  LinearSolve[{{1, 2, 1}, {2, 4, 2}, {3, 6, 3}}, {a, b, c}]
```

أساس الفراغ الصفرى للمصفوفة mat4 يحتوى على متجهان

```
In[11]:=NullSpace[mat4]
Out[11]={{-1, 0, 1}, {-2, 1, 0}}
```

ومن المميزات الهامة للأمر LinearSolve والأمر NullSpace هو التعامل مع مصفوفات من أي رتبة .

رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

القيم المميزة لمصفوفة m هى قيم λ التى تحقق المعادلة m . λ x = x حيث x متجه غير صفرى وفى هذه الحالة فإن المتجهات x التى تحقق هذه المعادلة تسمى المتجهات المميزة للمصفوفة m والتى تناظر القيمة المميزة λ ويمكن الحصول على القيم المميزة من حل كثيرة الحدود المميزة Characteristic polynomial وتعطى بالمعادلة

$$|m-\lambda J|=0$$

حيث J مصفوفة الوحدة ، وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لآي مصفوفة كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة للمصفوفة m	**Eigenvalues[m]**
تكوين قائمة تحتوى على جميع المتجهات المميزة للمصفوفة m	**Eigenvectors[m]**
تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m وتكون بالصورة { eigenvalue,eigenvector }	**Eigensystem[m]**
تكوين قائمة تحتوى علىقيم عددية تقريبية للقيم المميزة للمصفوفة m	**Eigenvalues[N[m]]**

تعريف المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

```
In[1]:=m={{1,2},{3,2}}
Out1]= {{1, 2}, {3, 2}}
```

```
In[2]:=Eigenvalues[m]
Out[2]= Eigenvalues::eival:
  Unable to find all roots of the characteristic polynomial.
  Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 2}}]
```

نلاحظ أن ماثيماتيكا لا يتمكن من حساب القيم المميزة للمصفوفة m لان عناصر المصفوفة أعداد صحيحة ويمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق كتابة الأعداد الموجودة في المصفوفة بالصورة العشرية (فمثلا يكتب .3 بدلا من 3) كما يمكن عمل ذلك باستخدام الدالة N

القيم المميزة للمصفوفة m

```
In[3]:=Eigenvalues[N[m]]
Out[3]= {4., -1.}
```

المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[4]:=Eigenvectors[N[m]]
Out[4]= {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}
```

تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[5]:={values,vectors}=Eigensystem[N[m]]
Out[5]= {{4., -1.}, {{-0.5547,-0.83205},
         {-0.707107, 0.707107}}}
```

للتحقق من أن القيمة المميزة الأولى k_1 والمتجه المميز x يحقق المعادلة $m \, . \, x = k_1 \; x$

```
In[6]:=m.vectors[[1]]= =values[[1]] vectors[[1]]
Out[6]= True
```

لإيجاد المعادلة المميزة للمصفوفة m

```
In[7]:=po=Det[m-k IdentityMatrix[Dimensions[m][[1]]]]
```

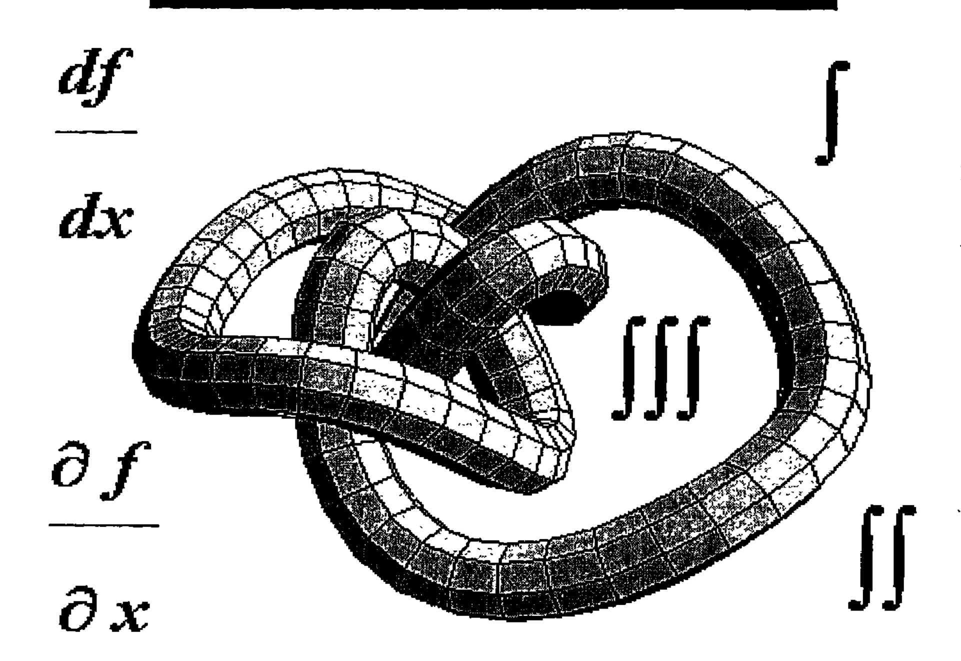
Out[7]= $-4 - 3\,k + k^2$

لحل المعادلة المميزة والحصول على القيم المميزة للمصفوفة m

```
In[8]:=Solve[po==0,k]
Out[8]= {{k -> -1}, {k -> 4}}
```

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. تعريف الدوال Defining Functions

٢. النهايات Limits

٣. التفاضل Differentiation

٤. التكامل Integration

٥. المعادلات التفاضلية Differential Equations

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

نعلــم أن برنــامج ماثيماتيكــا يســتطيع التعــامل مــع التعبــيرات الرمزيــة Symbolic expressions بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن اســتخدام ماثيماتيكا فى حساب النهايات Limits وحساب التفاضل والتكــامل Calculus للــدوال المختلفة والحصول على النتائج فى صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساســية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا built-in أو دوال نقوم بتعريفها ، وكذلك يمكــن اســتخدام ماثيماتيكا فى حل المعادلات التفاضلية .

١ . تعريف الدوال Defining Functions

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا فإنه يمكن للمســتخدم إضافــة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفســه وســوف نســتخدم الحــروف الصغــيرة lower case - letters فى كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسمــاء الدوال الموجودة فى بناء ماثيماتيكا وبين أسماء الدوال الجديدة التى يقوم المستخدم بتعريفها وفقــا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة $f(x)=x^2$ فى ماثيماتيكا يكتب فى الصورة f [x_]=x^2 والعلامة _ الموجودة فى الطرف الأيسر بجانب المتغير x تسمى الفراغ الخالى blank space وهى هامة فى تعريف الدالة حيث النمط x_ pattern يرمز الى أي تعبير أو متغــير وبذلــك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل Transformation Rule لجميع التعبيرات التى على الصورة f[anything] حيث anything يشير الى المتغير x أو أي متغير آخــر

وعندما يظهر تعبير على الصورة f[anything] فإنه يستبدل بالقيمة anything ^ 2 والتى تمثل ناتج تعريف الدالة f .

تعريف الدالة $f(x)=x^2$

In[1]:=f[x_]=x^2

Out[1]=x^2

عند حساب قيمة الدالة f(x) عند x = 3

فإن الناتج يكون 3^2 ويساوى 9

In[2]:=f[3]

Out[2]= 9

لحساب قيمة الدالة f(x) عند x = a+1

In[3]:=f[a+1]

Out[3]=$(a+1)^2$

عند حساب قيمة f(x) + f(y)

In[4]:=f[x]+f[y]

Out[4]=$x^2 + y^2$

وفى حالة عدم كتابة العلامة _ بالطرف الأيسر فى تعريف الدالة فإن f[x] سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا فى ماثيماتيكا التعريف g[x]=x^3 فإنه عند ظهور التعبير g[x] يتم استبداله بالقيمة x^3 لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير x بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا g[3] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل g[a] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط _ فى تعريف الدالة g .

تعريف $g(x)=x^3$ بدون استخدام النمط _

In[5]:=g[x]=x^3

Out[5]= x^3

عند حساب قيمة g(x) عند x = 3 فإن الناتج يكون g[3] أي أن g(x) لا تمثل قاعدة تحويل

In[6]:=g[3]

Out[6]= g[3]

لحساب قيمة $g(x)$ عند $x = a$ فإن الناتج يكون g[a] آي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل

```
In[7]:=g[a]
Out[7]= g[a]
```

عند حساب قيمة $g(x) + g(y)$ نلاحظ أن الناتج x^3 + g[y] لان $g(x)=x^3$ بينما $g(y)$ ليست معلومة

```
In[8]:=g[x]+g[y]
Out[8]=x^3 + g[y]
```

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال في ماثيماتيكا :

f[x] = value	تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل
f[x_] = value	تمثل تعريف دالة وهى قاعدة تحويل لاى متغير x

وفى ماثيماتيكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالآتي :

?f	للاستعلام عن تعريف الدالة f
Clear[f]	لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

للاستعلام عن تعريف الدالة f التى سبق إدخالها فى جملة الإدخال In[1]

```
In[9]:=?f
Out[9]=  Global`f
        f[x_] = x^2
```

لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

```
In[10]:=Clear[f]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة f نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة

```
In[11]:=?f
Out[11]= Global`f
```

وفى برنامج ماثيماتيكـــا يمكن تعريف دوال فى اكثر من متغير ويتم ذلك بتحـــديد أسم للدالة واستخدام النمط _ لكل متغير فى الدالة .

تعريف الدالة r1 فى متغيرين

```
In[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2
```

Out[12]= $x^2 + x\,y + y^2$

لحساب قيمة الدالة r1(x,y) عند x=2 , y=3

```
In[13]:=r1[2,3]
Out[13]=19
```

تعريف الدالة r2 فى أربعة متغيرات

```
In[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2
```

Out[14]= $(x-z)^2 + (y-t)^2$

وفى بـــرنامج ماثيماتيكـــا عند تعريف دالـــــة كجـــملة إحلال hs = rhs فإنـــه يوجـــد مؤثرين للإحلال assignment operators

المؤثر الأول هو علامة التساوى =

والمؤثر الثانى هو علامة :=

والفرق الأساسى بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجملـــــة الإحـــلال كالآتي :

المؤثر = يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs = rhs إذا كان الطـــــرف الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs

المؤثر := يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs := rhs إذا كان الطـــرف الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطـــرف الأيســـر lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = في تعريف الدالة r3(x) التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

```
In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
```
Out[15]= $1+2x+x^2$

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r3(x) نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه في صورة مفكوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
        r3[x_] = 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة r3(x) عند x = a + b يتم التعويض عن a + b في المفكوك الموجود بالفعل وهو $1 + 2x + x^2$

```
In[17]:=r3[a+b]
```
Out[17]=$1 + 2 (a + b) + (a + b)^2$

عند استخدام المؤثر := في تعريف الدالة r4(x) التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه في كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة r4(x)

```
In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r4(x) نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفكوك Expand جاهز للتنفيذ

```
In[19]=?r4
Out[19]=Global`r4
        r4[x_] := Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة r4(x) عند x = a + b يتم التعويض عن a + b في أمر المفكوك Expand[(1+a+b)^2] ثم يتم تنفيذه

```
In[20]:=r4[a+b]
```
Out[20]=$1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2$

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب مضروب آي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ 3x2x1$$

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa   In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]

نلاحظ انه فى جملة الإحلال الأولى fa[1]=1 استخدمنا المؤثر = لأن الطرف الأيمن قيمته محسوبة بينما فى جملة الإحلال الثانية fa[n]:=n fa[n-1] استخدمنا المؤثر := لأن الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها فى حساب الطرف الأيمن rhs فى كل مرة لذلك فإن المؤثر := ضرورى فى تعريف هذه الدالة .

لحساب !4

```
In[22]:=fa[4]
Out[22]=24
```

لحساب !6

```
In[23]:=fa[6]
Out[23]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[24]:=?fa
Out[24]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := n*fa[n - 1]
```

لحذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماثيماتيكا

```
In[25]:=Clear[fa]
```

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ اختفاء التعريف

```
In[26]:=?fa
Out[26]=Global`fa
```

وماثيماتيكا عند تنفيذه لهذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطى للدالة بالصورة fa[6]=6 fa[5] وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] من العلاقة fa[5]=5 fa[4] وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[4] وهكذا حتى يصل الى fa[1] وقيمته معطاة ونلاحظ أن ماثيماتيكا عند حسابه لقيمة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تتذكر القيم التى يتم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التى يتم إيجادها	f[x_]:=f[x] = rhs

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa بحيث تحفظ القيم التى يتم إيجادها

```
In[27]:=fa[1]=1;fa[n_]:=fa[n]=n fa[n-1]
```

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[28]=?fa
Out[28]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

لحساب !4 بواسطة fa[4]

```
In[29]:=fa[4]
Out[29]=24
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التى تم إيجادها

```
In[30]:=?fa
Out[30]=Global`fa
    fa[1] = 1
    fa[2] = 2
    fa[3] = 6
    fa[4] = 24
 fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

لحساب !6 بواسطة fa[6]

```
In[31]:=fa[6]
Out[31]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التى تم إيجادها

```
In[32]:=?fa
Out[32]=Global`fa
   fa[1] = 1
   fa[2] = 2
   fa[3] = 6
   fa[4] = 24
   fa[5] = 120
   fa[6] = 720
fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخل التعبير الرياضى عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال x = 3 فهذا يعنى أن يقوم ماثيماتيكا باستبدال المتغير x بالقيمة 3 فى أي مكان بالبرنامج يظهر فيه المتغير x إلا إذا تم تغير قيمة x أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى تعبير خاص particular expression ، ويمكن عمل ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام المؤثر /. أو المؤثر //. كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
استبدال المتغير x بالقيمة value فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة x->value مرة واحدة فقط	expr /. x->value
استبدال المتغير x بالقيمة xval والمتغير y بالقيمة yval فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة y->yval , x->xval مرة واحدة فقط	expr /. {x->xval,y->yval}
تطبيق القاعدة rules فى التعبير expr مرة واحدة فقط حيث القاعدة rules تكون بالصورة lhs->rhs	expr /. rules
تطبيق القاعدة rules على كل أجزاء التعبير expr بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى	expr//.rules
تطبيق القاعدة rules كوحدة متكاملة على التعبير expr دون تطبيقها على الأجزاء الفرعية من expr	Replace[expr,rules]

In[1]:=1+x^2/.x->3
Out[1]=10

استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى التعبير الرياضى
$x^2 + 1$

In[2]:=x
Out[2]=x

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام المؤثر ./ فى استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا يؤثر فى قيمة المتغير x داخل البرنامج

In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2}
Out[3]=9

استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير y بالقيمة 2 فى التعبير الرياضى
$x^2 + 2xy + y^2$

In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5
Out[4]=36

إحلال قيمة $x^2 + 2x + 1$ فى المتغير t ثم حساب قيمة t عندما x->5

In[5]:=f[5]/.f[x_]->x
Out[5]=5 f[4]

تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]
f[x-1]
ونلاحظ أن المؤثر ./ يقوم بتطبيق القاعدة مرة واحدة فقط

In[6]:=f[5]//.{f[1]->1,f[x_]->x f[x-1]}
Out[6]=120

عنداستخدام المؤثر .// يتم تطبيق القاعدة لحساب f[5] بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى

In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a
Out[7]=2a + a^2

عند استخدام المؤثر ./ يتم تطبيق القاعدة على كل الأجزاء فى التعبير الرياضى

عند حساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ لقيم x التى تقترب من الصفر نلاحظ ما يأتى :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ عندما $x = 0$ فان الناتج يكون كمية غير معينة

In[16]:=Sin[x]/x /.x->0

Out[16]=Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity::indet:
Indeterminate expression

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن حساب النهايات $\lim_{x->x_0} f(x)$ وذلك باستخدام الدالة **Limit** كالآتى :

Limit[expr, x->x_0]	حساب نهاية الدالة **expr** عندما تقترب **x** من **x_0**

في الجدول الآتي نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة الرياضيات	النهاية بلغة ماثيماتيكا
$\lim\limits_{x->2} x^2+3x-7$	In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3
$\lim\limits_{x->1} \frac{x^2-1}{x-1}$	In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2
$\lim\limits_{x->3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$	In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3
$\lim\limits_{x->2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$	In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$
$\lim\limits_{x->4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$	In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$
$\lim\limits_{x->2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$	In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity
$\lim\limits_{h->0} \frac{x^2\ (x+h)}{2x+h}$	In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$
$\lim\limits_{x->1} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$	In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity

النهاية بلغة الرياضيات	النهاية بلغة ماثيماتيكا
$\lim\limits_{x->0} \frac{\sin(x)}{x}$	In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1
$\lim\limits_{x->0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$	In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x->0} \frac{x^2}{\sec(x)-1}$	In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2
$\lim\limits_{x->\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$	In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity
$\lim\limits_{x->0} \frac{\tan(3x)}{2x^2+5x}$	In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$
$\lim\limits_{x->\infty} \frac{2x^2-3x}{3x^2+2}$	In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$
$\lim\limits_{x->\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$	In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1
$\lim\limits_{x->\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E

٣ . التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة في صورتها الرمزية في متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلى Total أو تفاضل جزئى Partial ويتم ذلك في ماثيماتيكا باستخدام الأمر D كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر في ماثيماتيكا
حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أوحساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة f في اكثر من متغير	D[f,x]
حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة f في اكثر من متغير	D[f,{x,n}]
حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x1}\frac{\partial}{\partial x2}\ldots f$	D[f,x1,x2,...]
حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مـــع اعتبـــار أن المتغيرات v1,v2,... دوال تعتمد على المتغير x	D[f,x,NonConstants->{v1,v2,...}]

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x $^{n-1}$	$\frac{d}{dx} x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x^2 + 5 x^4	$\frac{d}{dx}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x^3	$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x^{n-3}	$\frac{d^3}{dx^3} x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx} \sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec^2[x]	$\frac{d}{dx} \tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x^2 Cos[x] - x^3 Sin[x]	$\frac{d}{dx} x^3 \cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x^2 Sec[x^3]+ 12 x^4 Sec[x^3] Tan[x^3]	$\frac{d}{dx} 4x^2 \sec(x^3)$

التفاضل بلغة الرياضيات	التفاضل بلغة ماثيماتيكا
$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)$	In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{Sqrt[1-x^2]}$
$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x^2)$	In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$
$\frac{d}{dx}\frac{\sin(t)}{t}$	In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{Cos[t]}{t}-\frac{Sin[t]}{t^2}$
$\frac{d}{dx}(Log(x))^2$	In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2Log[x]}{x}$
$\frac{d}{dx}f(x)$	In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]
$\frac{d}{dx}f(x^2)$	In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]
$\frac{d}{dx}\left(x^2+(y(x))^3\right)$	In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= 2x + 3 (y[x])^2 y'[x]
$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^3\right)$ مع اعتبار أن y دالة في x	In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]= − x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]= y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]= x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]= 2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]= − 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$

وعند أجراء التفاضل على دالة f في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بـــالرمز f نلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون كالآتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,0)}$ [x, y]
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(0,1)}$ [x, y]
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(2,0)}$ [x, y]
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,1)}$ [x, y]
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,2)}$ [x, y]
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]

نعلم أن إذا كانت $f = f(x,y)$ فإن التفاضلة الكلية (**Total Differential**) يرمز لها **df** وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر **D** كما رأينا فى المثال $D[x^n,x]$ يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة x^n بالنسبة الى **x** مع اعتبار أن **n** ثابت لا يعتمد على **x** وفى ماثيماتيكا يوجد أمر آخر يرمز له **Dt** ويقوم بحساب المشتقة الكلية **Total Derivative** وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات فى الاعتبار .

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا
حساب التفاضلة الكلية **df**	Dt[f]
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$	Dt[f,x]
حساب المشتقة الكلية من رتبة **n** آي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$	Dt[f,{x,n}]
حساب المشتقةالكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبـــار أن المتغيرات ...v1,v2, ثوابت لا تعتمد على المتغير **x** أي أن dv1=0 , dv2=0 , ...	Dt[f,x,Constants->{v1,v2,...}]

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة الرياضيات	التفاضلة بلغة ماثيماتيكا
$df = f'(x)\,dx$	In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]
$dx^n = nx^{n-1}\,dx + x^n \mathrm{Log}[x]\,dn$	In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n\,x^{n-1}$ Dt[x]+ x^n Dt[n] Log[x]
$dx^n = nx^{n-1}\,dx$ حيث n ثابت	In[35]:=Dt[x^n,Constants->{n}] Out[35]= $n\,x^{n-1}$ Dt[x,Constants- > {n}]
$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$	In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] $f^{(0,1)}$ [x, y] + Dt[x] $f^{(1,0)}$ [x, y]
$\frac{d}{dy}\left(x^2\sin(y)+y^2\right)= 2y+x^2\cos(y) + 2x\sin(y)\frac{dx}{dy}$	In[37]:= Dt[x^2Sin[y]+y^2,y] Out[37]= 2y+x^2 Cos[y]+2x Dt[x,y] Sin[y]
$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right)=2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}$	In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= 2 x + 2 y Dt[y, x] + 2 z Dt[z, x]
$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right)= 2x+2y\frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت	In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x,Constants>{z}] Out[39]= 2 x + 2 y Dt[y, x, Constants -> {z}]

٤ . التكامل Integration

برنامج ماثيماتيكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تحتـــوى على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، وناتج التكامل يكون في صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة (الثنائية والثلاثية ... الخ)وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمـــر Integrate كالآتي:

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا
حساب التكامل $\int f \, dx$	Integrate[f,x]
حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f \, dx$	Integrate[f,{x,xo,x1}]
حساب التكامل الثنائى $\int_{xo}^{x1} \int_{yo}^{y1} f \, dy \, dx$	Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1}]
حساب التكامل $\int_{xo}^{x1} \int_{yo}^{y1} \int_{...}^{...} f \, ... \, dy \, dx$	Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1},...]

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n\, dx$
In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\mathrm{Log}[x]}$	$\int x^n\, dn$
In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]	$\int \frac{1}{x}\, dx$
In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]	$\int \mathrm{Log}\,(x)\, dx$
In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= $E^x\ (-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3)$	$\int x^3 e^x\, dx$
In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]	$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$
In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[8]:=Integrate[1/Sqrt[9-x^2],x] Out[8]=ArcSin[$\frac{x}{3}$]	$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$
In[9]:=Integrate[1/Sqrt[1+x^2],x] Out[9]=ArcSinh[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$
In[10]:=Integrate[x^2 Sin[x],x] Out[10]=2 Cos[x] - x^2 Cos[x] + 2 x Sin[x]	$\int x^2 \sin(x)\, dx$
In[11]:=Integrate[y x^2,x] Out[11]= $\frac{y\,x^3}{3}$	$\int yx^2\, dx$
In[12]:=Integrate[x^2,{x,1,4}] Out[12]= 21	$\int_1^4 x^2\, dx$
In[13]:= Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,3x}] Out[13]= 3 a^4	$\int_0^a \int_0^{3x} (x^2 + y^2) dy\, dx$
In[14]:= Integrate[xy+z,{z,0,1},{y,1,5z} ,{x,y,3y+5z}] Out[14]= 286	$\int_0^1 \int_1^{5z} \int_y^{3y+5z} (x^2 + y^2) dy\, dx$
In[15]:=Integrate[xy+zw^2,{w,0,2}, {z,1,w},{y,0,z+w},{x,w,y^2+2w}] Out[15]= $\frac{37916}{315}$	$\int_0^2 \int_1^w \int_0^{z+w} \int_w^{y^2+2w} (xy+zw^2) dx\, dy dz dw$

٥. المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلة التفاضلية هى معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والدالة التابعة ومشتقات هذه الدالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضلية تحتوى على متغير مستقل واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية **Ordinary Differential Equation (ODE)** وإذا كانت المعادلة تحتوى على متغيرين مستقلين أو اكثر فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية (**Partial Differential Equation PDE**) .

ورتبة **Order** المعادلة التفاضلية هى رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة **Degree** المعادلة التفاضلية هى الأس المرفوع أليه المشتقة ذات اكبر رتبة . وفى الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية عادية (ODE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} = x + 5$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الأولى	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الثانية	$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$
الدرجة الأولى	الرتبة الثالثة	$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$

Degree الدرجة	Order الرتبة	(PDE) معادلات تفاضلية جزئية
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = f$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

يقال للمعادلة التفاضلية (عادية ODE أو جزئية PDE) أنها معادلة تفاضلية خطية **Linear Differential Equation** إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوى على حوا صل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem** إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر **Dsolve** كالآتي :

لحل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع y[x] بدلالة المتغير المستقل x

DSolve[eqn, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x] Out[1]={{y[x] -> E^x C[1]}}	$\frac{dy}{dx}=y$
In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x] Out[2]={{y[x] -> C[1] + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx}=\cos(x)$
In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x] Out[3]= $\left\{\left\{y[x]->\frac{x}{2}+\frac{C[1]}{x}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=1$
In[4]:=DSolve[{y''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x] Out[4]= {{y[x] -> -x + x^2 + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}	$y''+y=x^2-x+2$
In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x] Out[5]= {{y[x] -> x (-2 E^x + E^x x + C[1] + x C[2])}}	$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^4e^x$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-4y = xe^{-2x}$$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[6]:=Dsolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] Out[6]= $\left\{\left\{y[x]->-\frac{1}{18}\left(x^2+x^3\right)e^{-2x}+\left(C[1]+xC[2]\right)e^{-2x}+e^x C[3]\right\}\right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}=3e^{2x}+4\sin(x)$$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[7]:=DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] Out[7]= $\left\{\left\{y[x]->\frac{C[1]}{e^{3x}}+C[2]+xC[3]+e^x C[4]+\frac{1}{180}\left(27e^{2x}+72\,Cos[x]+144Sin[x]\right)\right\}\right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-9\right)y=0$$ Bessel Equation معادلة بيسـل	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[8]:=DSolve[x^2y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] Out[8]={{y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]}}	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا

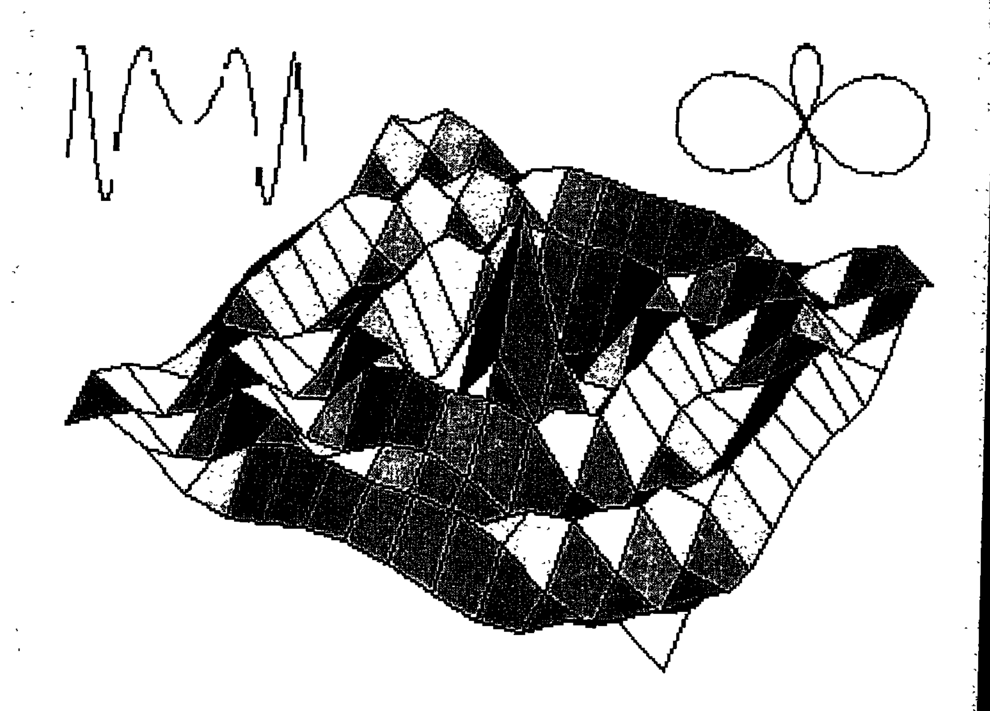
لحل المعادلة التفاضلية eqn والتى تحقق الشرط الابتدائى y[xo]=a

DSolve[{eqn,y[xo]==a}, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x] Out[9]={{y[x] ->3 E^x }}	$\frac{dy}{dx}=y$, y[0]=3
In[10]:= DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x] Out[10]={{y[x] -> 2 + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx}=\cos(x)$, y[0]=2
In[11]:= Dsolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x], y[1]=-2},y[x],x] Out[11]= $\left\{\left\{y[x]->-Sqrt[\frac{18}{5x^4}+\frac{2x}{5}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=y$, y[1]=-2
In[12]:= Dsolve[{y''[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] + Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x] Out[12]={{y[x] -> E^x - E^x x + E^{2x} x}}	$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x+e^{2x}$ y[0]=1 , y'[0]=1

الباب الخامس

ماثيماتيكا ورسم الدوال



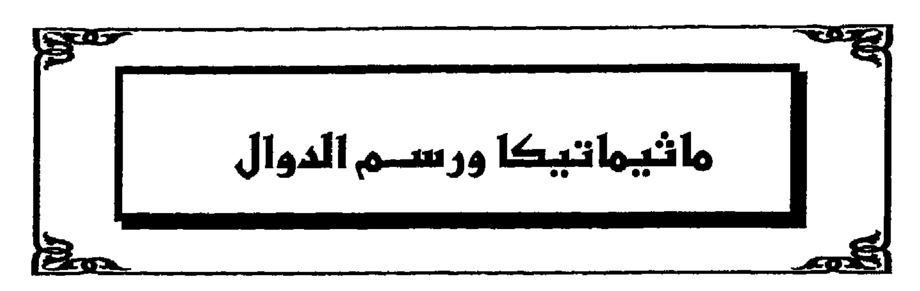
فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. رسم الدوال في المستوى Two-Dimensional Plotting

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

٣. رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

الباب الخامس



ماثيماتيكا ورسم الدوال

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أداء دور كبير فى عمليات رسم الدوال فى المستوى والفراغ وكذلك الدوال فى الصورة البارامترية ولتنفيذ عملية رسم الدوال فى ماثيماتيكا نحتاج الى تحديد ثلاث أشياء أساسية هى :

- تعريف الدالة المطلوب رسمها
- تعريف المتغير المستقل **Independent variable**
- تعريف نطاق المتغير المستقل **Domain**

ويحتوى ماثيماتيكا على العديد من الاختيارات **Options** التى تتحكم فى شكل ومواصفات الرسم **graph** وبعض هذه الاختيارات يكون فعال **Default** بمعنى أن ماثيماتيكا يقوم بتنفيذها أوتوماتيك **Automatic** عند بداية التشغيل فمثلا الاختيارات

- تحديد مقياس رسم مناسب **scale**
- تحديد عدد النقط التى يتم حساب قيم الدالة عندها
- اختيار المدى **Range** للمتغير التابع **Dependent variable**
- تحديد وترقيم محاور الإحداثيات

تعتبر من الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكا وكل اختيار له اسم محدد ويمكن للمستخدم تغيير الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكا وإضافة آي اختيارات أخرى حسب طبيعة الرسم المطلوب .

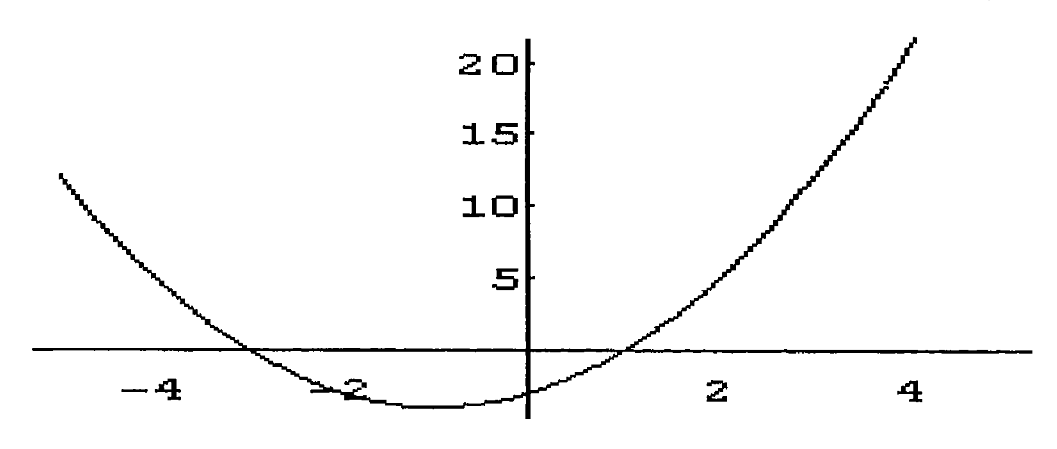
١. رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting

الدالة ذات المتغير الواحد يرمز لها $y = f(x)$ حيث x يسمى بالمتغير المستقل ، y يسمى بالمتغير التابع ونطاق الدالة يقع على محور x والمدى يقع على محور y وترسم الدالة فى المستوى ويمثلها مجموعة النقط (x,y) فى المستوى التى تحقق $y = f(x)$ ، ومن أهم أوامر رسم الدوال فى ماثيماتيكا هو الأمر Plot وله الصيغة العامة الآتية :

Plot[f, {x, xmin, xmax}] رسم الدالة f كدالة فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] رسم مجموعة دوال ... , f1 , f2 فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax

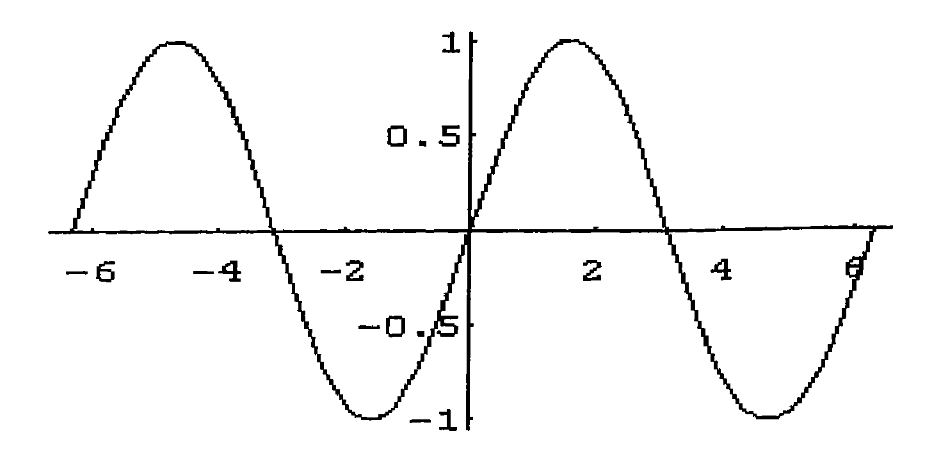
والناتج من تنفيذ أمر Plot يكون صورة مرسومة " Graphics Object " للدالة أو لمجموعة الدوال المعطاة وفقا للاختيارات الفعالة .

In[1]:=Plot[x^2+2x-3,{x,-5,5}] رسم الدالة $x^2 + 2x - 3$ فى الفترة [-5,5]



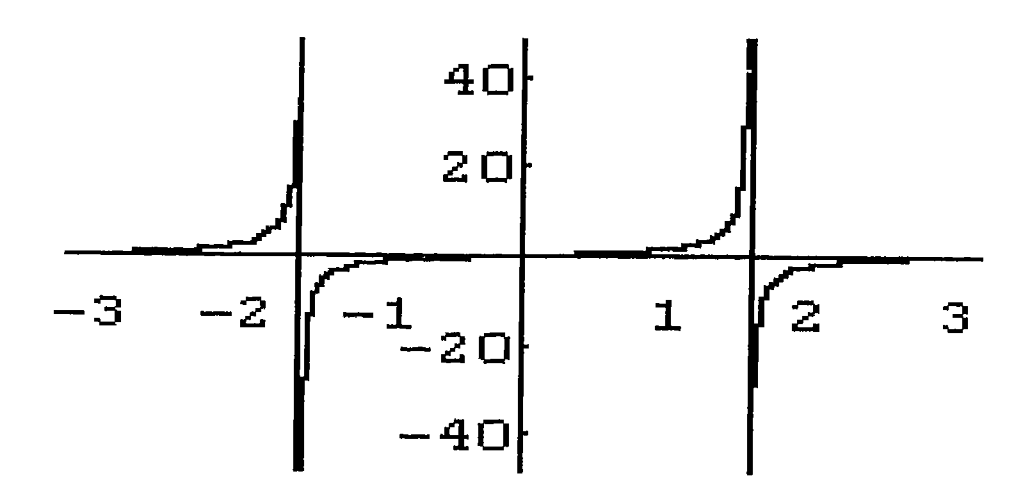
Out[1]=-Graphics-

رسم الدالة sin x في الفترة [$-2\pi, 2\pi$] In[2]:= Plot[Sin[x],{x,-2Pi,2Pi}]

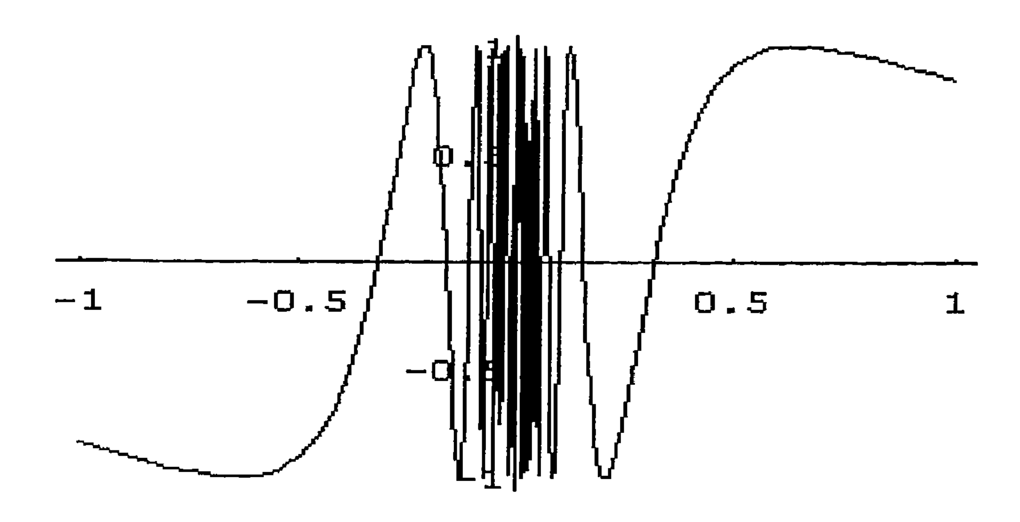


والأمر Plot في ماثيماتيكا قادر على رسم دوال لها نقاط شاذة في نطاق التعريف حيث يقوم ماثيماتيكا باختيار مقياس رسم مناسب .

رسم الدالة Tan(x) في الفترة [-3,3] In[3]: =Plot[Tan[x],{x,-3,3}

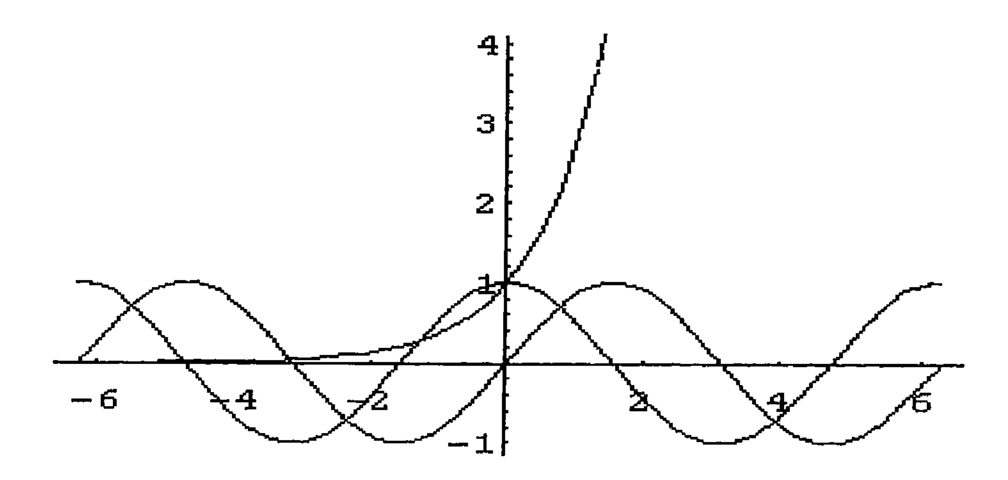


الدالة sin(1/x) لها نقطة شـــاذة عند x=0 **In[4]:=Plot[Sin[1/x],{x,-1,1}]**



In[5]:=Plot[{Sin[x],Cos[x],Exp[x]},{x,-2Pi,2Pi}]

لرسم مجموعة من الدوال على نفس النطاق



ونلاحظ فى الأمثلة السابقة انه تم رسم الدوال بدون إضافة أي اختيارات Options الى أمر الرسم Plot بمعنى أن الرسوم تم تنفيذها بالاختيارات الفعالة default الموجودة داخل ماثيماتيكا ، ولكن كان من الممكن إضافة أي اختيارات للرسم حيث أن كل اختيار له اسم Name ويأخذ قيمة Value ويتم وضع الاختيار Option داخل أمر الرسم Plot فى صورة قاعدة

Name -> Value

ويمكن وضع اكثر من اختيار داخل أمر الرسم Plot بحيث يفصل كل منها علامة الفاصلة "," ومن القيم Value المستخدمة فى هذه الاختيارات

Automatic	وتعنى أن يتم الاختيار اتوماتيك وفقا لأسلوب ماثيماتيكا
All	وتعنى عمل كل ما هو متاح من ماثيماتيكا فى هذا الاختيار
None	وتعنى عدم استخدام ما هو متاح من ماثيماتيكا فى هذا الاختيار
True	وتعنى تنفيذ الاختيار
False	وتعنى عدم تنفيذ الاختيار

وفى حالة عدم تحديد قيمة خاصة لاختيار ما للأمر Plot فإن ماثيماتيكا يقوم أوتوماتيك باستخدام القيمة الفعالة لهذا الاختيار وبصفة عامة يمكن الاستعلام عن القيم الفعالة للاختيارات المتاحة لدالة function باستخدام الأمر Option فى الصورة

Option[function]

للتعرف على القيم الفعالة للاختيارات الخاصة بالأمر Plot **In[6]:=Option[Plot]**

Out[6]={ AspectRatio -> GoldenRatio^(-1) , Axes -> Automatic , AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10. PlotDivision>20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction }

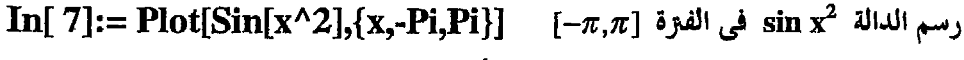
وإذا تم تحديد قيم خاصة لاختيارات دالة **function** وأردنا استخدام هذه القيم الجديدة اكثر من مرة بعد ذلك فإنه يمكن جعلها قيم فعالة باستخدام الأمر **SetOptions** في الصورة

SetOptions[function,Name1->value1,Name2->value2,...]

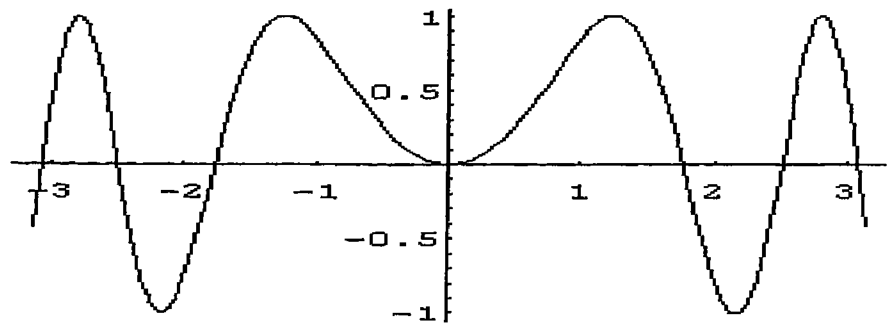
وسوف نتعرف الآن على بعض الاختيارات **Options** المستخدمة مع الأمر **Plot** والقيم الفعالة لكل منها وقيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم وكيفية تغيرها .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيـــــم أخرى للاختيار Another values
PlotRange -> Automatic	تحديـــد مـــدى الإحداثيات التي يتم التعامل معهـــا فـــي الرسم	PlotRange -> {ymin,ymax} PlotRange>{{xmin,xmax}, {ymin,ymax}} PlotRange -> All
PlotLabel -> None	كتابة عنوان علـــى الرسم	PlotLabel -> "expr" حيث "expr" تعني أي عنوان يتم كتابته على الرسم
Frame -> False	إمكانية عمل إطار حول الرسم	عمل إطار حول الرسم Frame -> True
FrameLabel -> None	إمكانية كتابة عنوان على الإطار حـــول الرسم	FrameLabel ->"graph(1)" كتابة العنوان graph(1) على الإطـــار حول الرسم
AxesOrigin -> Automatic	تحديد نقطة الأصل	AxesOrigin -> {x0,y0} تحديد النقطة (x0,y0) كنقطة اصل
Axes -> Automatic	رســـم محـــاور الإحداثيات	Axes -> None عدم رسم محاور للإحداثيات
AxesLabel -> None	كتابة عناوين علـــى المحاور	AxesLabel -> {"y-axes"} كتابة العنوان y-axes على محور y فقط AxesLabel -> { "x-label", "y-label"} كتابة العنوان x-label على محور x والعنوان y-label غلى محور y
GradLines -> None	لعمل رسم شـــبكي يحتوي بداخله علـــى رسم الدالة	GradLines -> Automatic

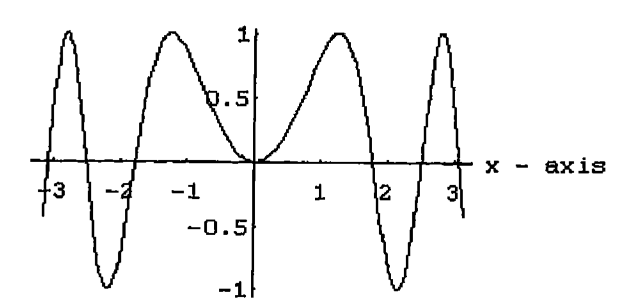
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيــــــم أخرى للاختيار Another values
AspectRatio -> $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ حيث GoldenRatio ≅ 1.61803	تمثل نسبة واجهـــة الرسم وهى النســبة بين ارتفاع وعــرض الرسم	AspectRatio-> Automatic AspectRatio->n اختيار عدد n يمثل النسبة بــين ارتفـــاع وعرض منطقة الرسم
Ticks -> Automatic	ترقيـــم محـــاور الإحداثيات	Ticks -> None عدم ترقيم المحاور Ticks -> {Automatic,None} ترقيم محور x فقط Ticks -> { None,Automatic} ترقيم محور y فقط
Plot Points -> 25	اختيار عدد n يمثل عدد النقط فى العينة والتى يتم حســاب قيم الدالة عندها	Plot Points -> n
MaxBend -> 10	اختيارعدد n يمثــل اكبر زاوية التواء بين القطع المتعاقبة علــى المنحنى	MaxBend -> n
PlotDivison -> 20	اكبر معامل يتم بــه تقسيم الفترةالمعطــاة الى فترات جزئية	PlotDivison -> n اختيار عدد n يمثل اكبر تقســيم ممكن من الفترات الجزئية للفترة المعطاة
Background -> Automatic	اختيار لون خلفيــة الرسم	Background -> GrayLevel[x] جعل الخلفية باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0,1
DisplayFunction-> $DisplayFunction	إظهار رسم الدالة	DisplayFunction-> Identity منع ظهور رسم الدالة



In[7]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}] رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$

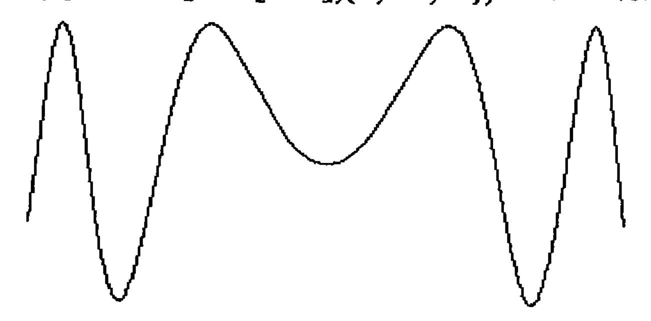


In[8]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesLabel->{"x - axis","y - axis"}]



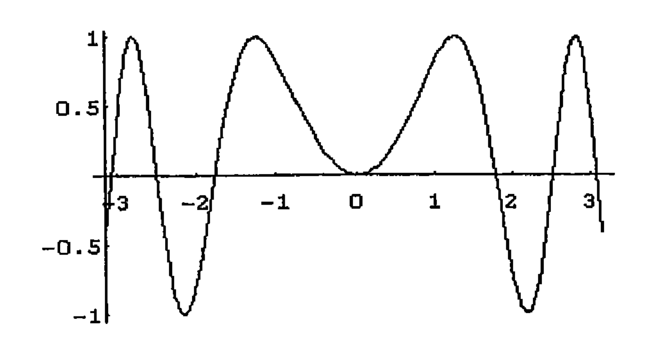
ولوضع العنوان " x - axis " على المحور الأفقي والعنــــوان " y - axis" على المحور الرأسي

In[9]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Axes->None]



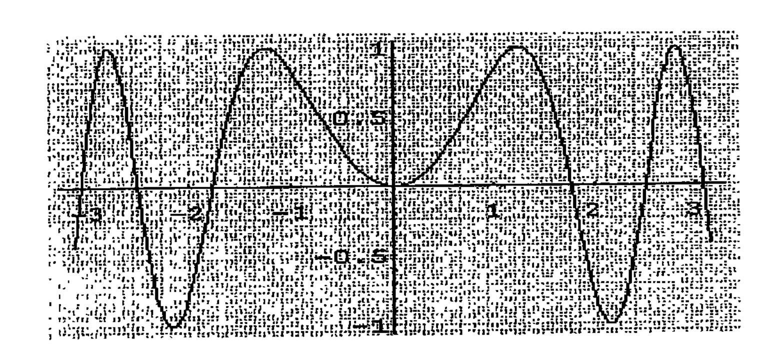
رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وحذف المحاور من الرسم

```
In[10]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesOrigin->{-Pi,0}]
```



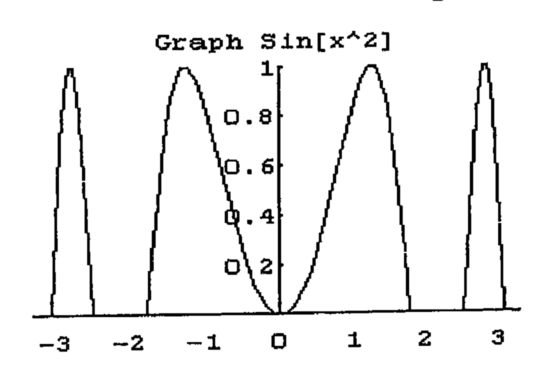
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وجعل نقطة الأصل هي النقطة $(-\pi,0)$

```
In[11]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Background->GrayLevel[0.5]]
```



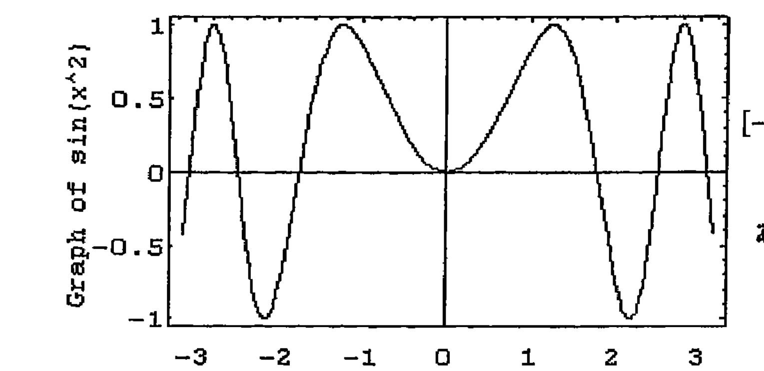
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ مع جعل خلفية الرسم باللون الرمادى

```
In[12]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},PlotRange->{0,1},
         PlotLabel->"Graph Sin[x^2]"]
```



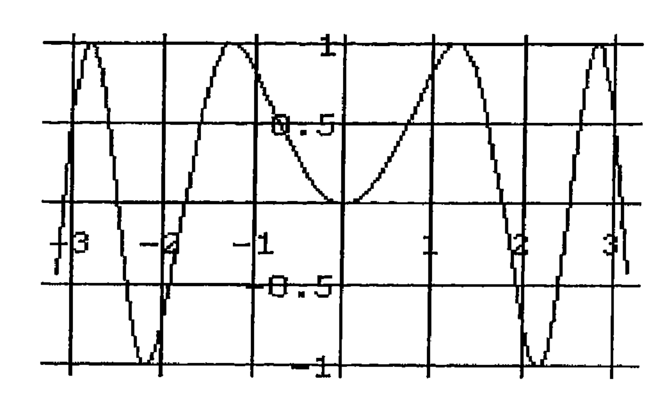
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وفي المدى من 0 الى 1 وكتابة عنوان على الرسم

```
In[13]:= Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Frame->True,
                FrameLabel->"Graph of sin(x^2)" ]
```



رسم الدالة $\sin x^2$ فى الفتـــــرة $[-\pi,\pi]$ مع عمل إطار خارجى حول الرســـم وكتـــابة عنوان على هذا الإطار

```
In[14]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},GridLines->Automatic]
```



رسم الدالة $\sin x^2$ فى الفتـــــرة $[-\pi,\pi]$ مع عمل خطوط شـــبكية على الرسم

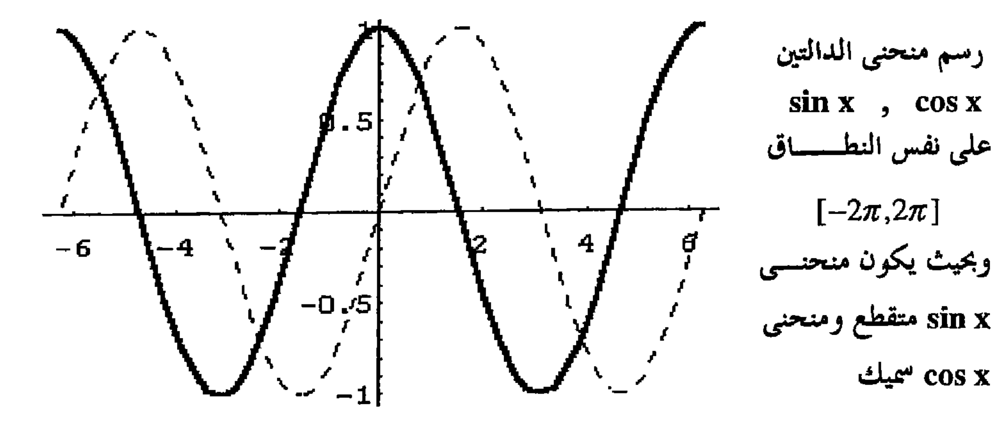
وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الرســـوم الأولية فى توضيح النقط والخطوط والمنحنيات بأساليب مختلفة **different styles** ويتم ذلك بواسطة الاختيار **PlotStyle** مـــع الأمـــر **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **PlotStyle** كالآتي :

PlotStyle->style تحديد الأسلوب style لرسم جميع المنحنيات للدوال الموجودة بالأمر Plot
PlotStyle->{{style1},{style2},...} تحديد الأساليب ... style1, style2, للاستخدام بصورة دورية مع منحنيات الدوال الموجودة فى الأمر Plot فمنحنى الدالة الأولى يرسم بالأسلوب style1 ومنحنى الدالة الثانية يرسم بالأسلوب style2 ... الخ

ونعرض الآن بعض الأساليب styles الموجودة فى ماثيماتيكا ووظيفة كلا منها .

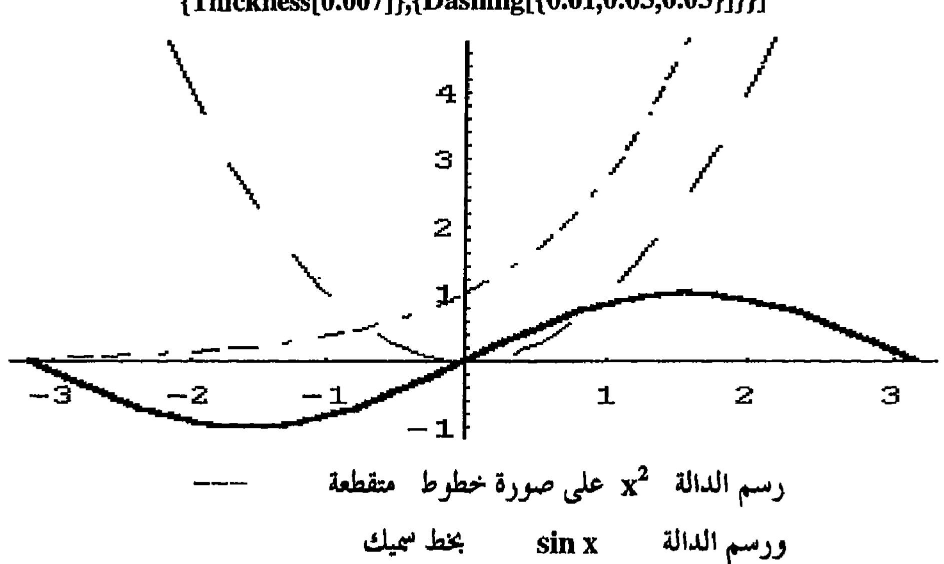
الوظيفة	الأسلوب style
رسم المنحنى بحيث يكون سمك الخط المستخدم يساوى x حيث x تمثل كسر من العرض الكلى للرسم فمثلا لجعل الخط كثيف Thickness[0.05]	Thickness[x]
رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d حيث d تمثل كسر من العرض الكلى للرسم ، فمثلا لرسم المنحنى متقطع بالصورة — يكتب Dashing[{0.25}]	Dashing[{d}]
رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها ...d1,d2, وبصورة دورية حيث كلا من di يمثل كسر من العرض الكلى للرسم	Dashing[{d1,d2,d3,...}]
رسم المنحنى باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0 , 1 حيث لون اسود black GrayLevel[0] لون ابيض white GrayLevel[1] لون رمادى gray GrayLevel[0.5]	GrayLevel[x]
رسم المنحنى ملون حيث r,g,b تمثل الألوان الأحمر red والأخضر green والأزرق blue على الترتيب وكل منها يأخذ قيم بين 0 , 1 وفقا لدرجة اللون المطلوب	RGBColor[r,g,b]

```
In[15]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-2Pi,2Pi},
          PlotStyle->{Dashing[{0.02}],Thickness[0.007]}]
```



رسم منحنى الدالتين
sin x , cos x
على نفس النطـــاق
$[-2\pi, 2\pi]$
وبحيث يكون منحنـــى
sin x متقطع ومنحنى
cos x سميك

```
In[16]:=Plot[{x^2,Sin[x],Exp[x]},{x,-Pi,Pi},PlotStyle->{{Dashing[{0.08}]},
          {Thickness[0.007]},{Dashing[{0.01,0.03,0.03}]}}]
```



رسم الدالة x^2 على صورة خطوط متقطعة ——

ورسم الدالة sin x بخط سميك

ورسم الدالة e^x على صورة خطوط متقطعة ونقط ——.——

والدوال الثلاثة مرسومة على نفس النطاق

ويمكن استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل محاور الإحداثيات فى الرسم الناتج ويتم ذلك باستخدام الاختيار AxesStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار AxesStyle كالآتي :

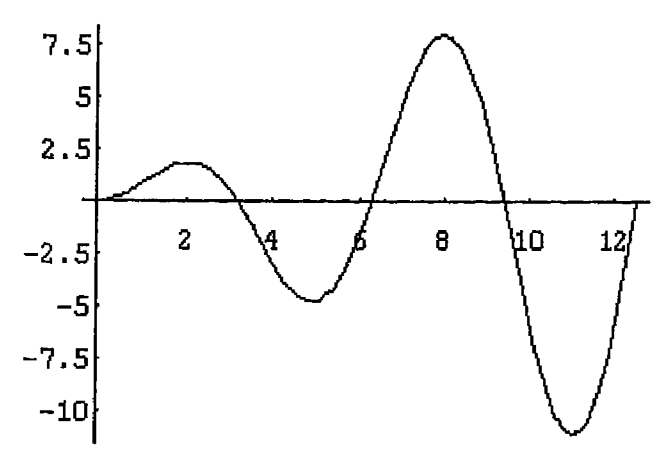
AxesStyle ->style تحديد الأسلوب **style** فى رسم محاور الإحداثيات
AxesStyle ->{{stylex},{styley}} تحديد الأسلوب **stylex** فى رسم محور **x** والأسلوب **styley** فى رسم محور **y**

ويمكن أيضا استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل الإطار المرسوم حول الرسم ويتم ذلك باستخدام الاختيار FrameStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار FrameStyle كالآتي :

FrameStyle ->style تحديد الأسلوب **style** فى رسم الأوجه الأربعة للإطار
FrameStyle ->{{xpstyle},{ypstyle},{ xnstyle},{ynstyle}} تحديد أربعة أساليب لرسم الأوجه الأربعة للإطار مبتدأ من الوجه الأفقي السفلى ويرسم بالأسلوب **xpstylex** والأوجه الباقية ترسم بالأساليب الباقية حسب دوران عقارب الساعة

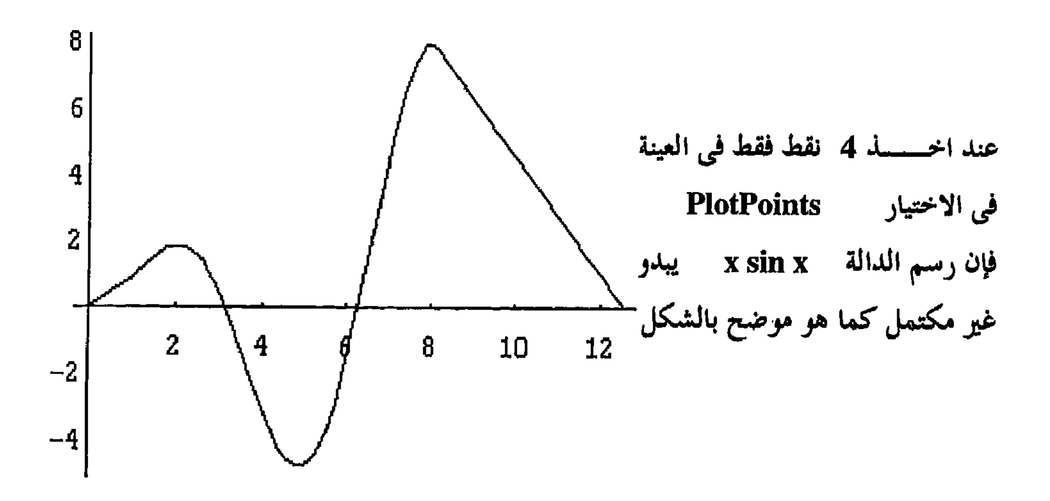
وفى ماثيماتيكا يقوم الأمر Plot فى البداية بحساب قيم الدالة عند عينة من النقط المتساوية البعد ويتم تحديد عدد النقط فى العينة بواسطة الاختيار PlotPoints وقيمته الابتدائية الفعالة هى 25 ثم يقوم الأمر Plot بعد ذلك بأخذ عينات إضافية من النقط لعمل منحنى بحيث تكون زاوية الالتواء bend بين الأجزاء المتعاقبة على المنحنى اقل من القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة فى الاختيار MaxBend وهى 10 ويتم تقسيم الفترة المعطاة الى فترات جزئية عددها (على الأكثر) يساوى القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة فى الاختيار PlotDivision وهى 20 .
ويجب مراعاةانه إذا استخدمنا عدد صغير من النقط فى العينة فإن رسم المنحنى قد يبدو غير مكتمل ويمكن التحقق من ذلك عن طريق زيادة عدد نقط العينة فى الاختيار PlotPoints .

In[17]:= p1=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->30]



عند اخـــذ 30 نقطة فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x
يكون كما هو موضح بالشكل

In[18]:= p2=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->4]



عند اخـــــذ 4 نقط فقط فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x يبدو
غير مكتمل كما هو موضح بالشكل

ويمكن التعرف على المعلومات التي يقوم ماثيماتيكا بحسابها عند تنفيذ أمر Plot لرسم الدالـــة وذلك باستخدام الأمر InputForm في الصورة

للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثيماتيكا على expr **InputForm [expr]**

فمثلا للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثيماتيكا على الرسم p2 في جملة الإدخال الســـابقة يرسل الأمر

InputForm [p2]

وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بحفظ المعلومات الخاصة بكل رسم يتم تنفيذه بحيث يمكن إعادة الرسم في آي وقت بعد ذلك مع إمكانية تغيير بعض الاختيارات المستخدمة وذلك للنظـــر الى الرســـم بطرق مختلفة كما يمكن عرض اكثر من رسم معا ويتم ذلك باستخدام الأمر Show كالآتي :

Show[p1]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot
Show[p1,option->value]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot مع تنفيذ الاختيار Option -> value
Show[plot1,plot2,...]	إعادة عرض رسم المنحنيات p1,p2,... الناتجة من Plot معا في رسم واحد

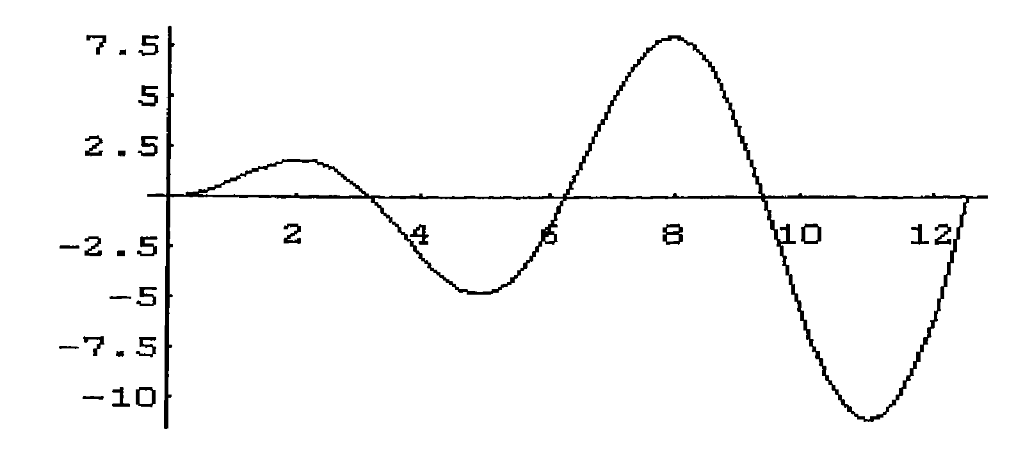
وفي أمر إعادة الرسم Show يمكن استخدام اختيارات الأمر Plot ما عدا الاختيارات التي تغير من طبيعة وعدد النقط في العينة المستخدمة لرسم الدالة مثل الاختيارات

PlotStyle , PlotPoints , MaxBand , PlotDivision

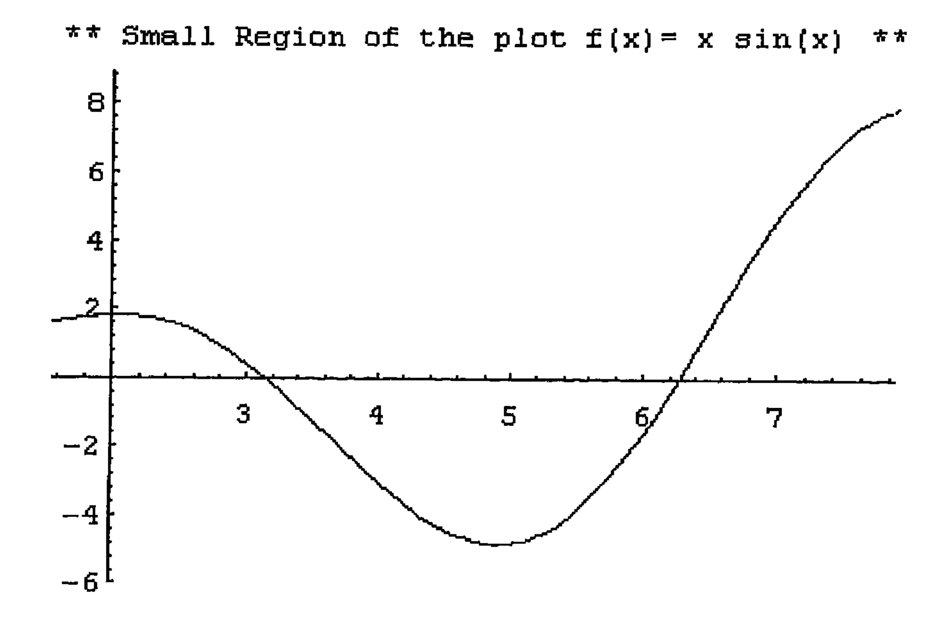
والأمثلة الآتية توضح ذلك .



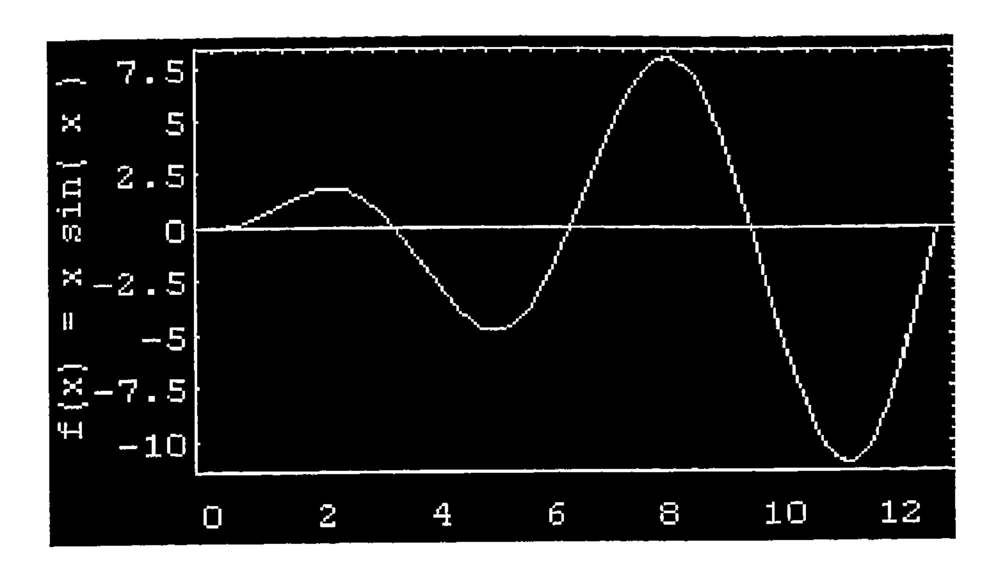
In[19]:= p3=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi}]



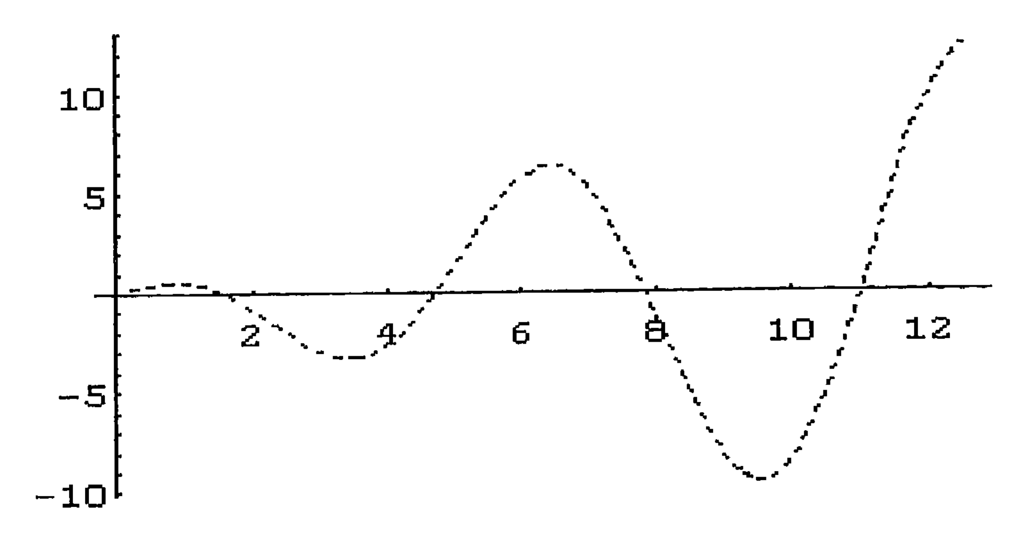
In[20]:= Show[p3,PlotRange->{{Pi/2,5Pi/2},{-6,9}},
PlotLabel->" ** Small Region of the plot f(x)= x sin(x) **"]



In[21]:= Show[p3,Frame->True,FrameLabel->" f(x) = x sin(x)",
Background->GrayLevel0]]

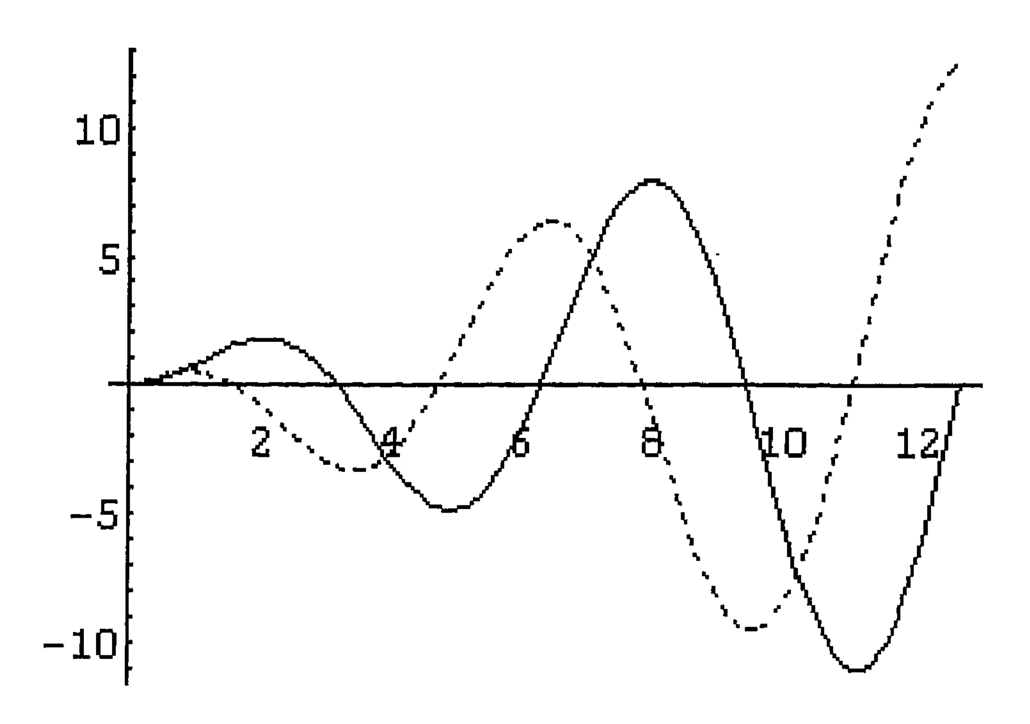


In[22]:=p4=Plot[x Cos[x],{x,0,4Pi},PlotStyle->Dashing[{0.01}]]





In[23]:= Show[p3,p4]



وفى برنامج ماثيماتيكا فإن جميع الرسوم الناتجة من الأمر **Plot** يتم تكوينها من قوائم من الرسوم الأولية **graphics primitives** المناسبة والموجودة داخل بنـــــاء ماثيماتيكـــــا وبعد ذلك يتم عرضها بالصـــــورة التى نراها

والجدول التالي يوضح بعض الرسوم الأولية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا .

Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتج
Point[{x,y}]	رسم نقطة فى المستوى لها الإحداثيات (x,y)
Line[{{x1,y1},{x2,y2}}]	رسم خط مستقيم يمر بالنقطتين (x1,y1) , (x2,y2)
Line[{{x1,y1},{x2,y2},{x3,y3},...}]	رسم خط منكسر يمر بالنقط المعطاة على الترتيب
Rectangle[{xmin,ymin},{xmax,ymax}]	رسم مستطيل إحداثيات رؤوسه على أحد القطرين هى (xmin,ymin) , (xmax,ymax)
Polygon[{{x1,y1},{x2,y2},...}]	رسم شكل كثير الأضلاع له الرؤوس المعطاة
Circle[{h,k},r]	رسم دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r
Circle[{h,k},{rx,ry}]	رسم قطع ناقص مركزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع من محور y يساوى ry
Circle[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r والقطاع يمتد من الزاوية t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة

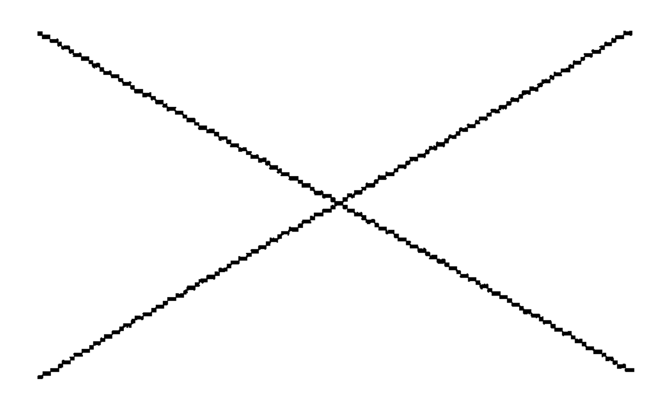
Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتج
Disk[{h,k},r]	رسم قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطة (h,k) ونصف قطره r
Disk[{h,k},{rx,ry}]	رسم قرص ممتلئ على هيئة قطع ناقص مركزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع من محور y يساوى ry
Disk[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطة (h,k) ونصف قطره r والقطاع يمتد من الزاوية t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة
Text[expr,{x,y}]	كتابة النص expr متمركزا عند النقطة (x,y)
GrayLevel[i]	عرض الأشياء التالية له باللون الرمادى بمستوى تلوين i يتراوح بين 0 , 1
RGBCdor[r,g,b]	عرض الأشياء التالية له ملونة بمستوى تلوين يتراوح بين 0 , 1 للون الأحمر r والأخضر g والأزرق b
PintSize[s]	رسم النقطة التالية فى الأمر Plot كمناطق دائرية نصف قطرها s حيث s تمثل كسر من العرض الكلى للرسم
Thickness[t]	رسم الخطوط بسمك t حيث t تمثل كسر من العرض الكلى للرسم
Dashing[{d1,d2,...}]	رسم الخطوط على صورة أجزاء متقطعة أطوالها d1,d2,... على التتابع حيث di تمثل كسر من العرض الكلى للرسم

ويمكن للمستخدم التعامل مباشرة مع الرسوم الأولية باستخدام الأمر Graphics كالآتي :

Graphics[primitives,options]
Graphics[{primitive1,primitive2,...}]

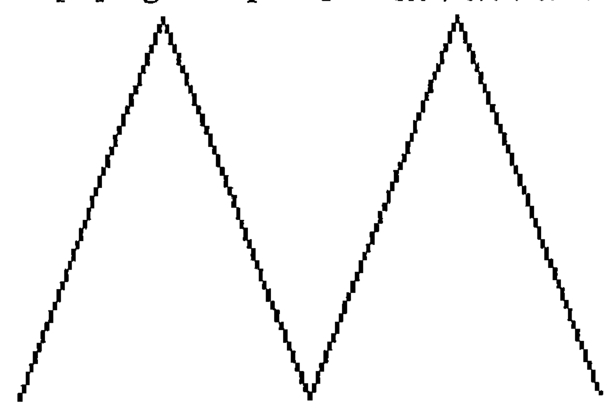
وناتج تنفيذ الأمر Graphics يكون رسالة على الصورة - Graphics - بدون ظهـــور الرسم ويتم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show .

```
In[24]:= g1=Graphics[{Line[{{-1,-1},{1,1}}],Line[{{-1,1},{1,-1}}]}]; Show[g1]
```



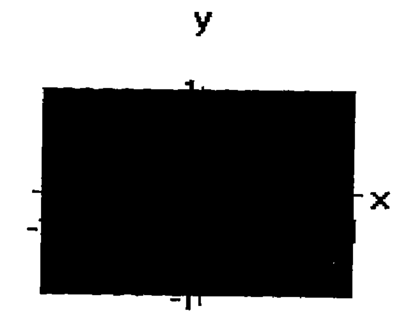
استخدام الأمر Graphics في رسم خط مســـتقيم يصل بين النقطتين (1,1) , (-1,-1) وخط مستقيم يصـــل بين النقطتين (1,-1) , (-1,1) ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[25]:= g2=Graphics[Line[{{0,0},{1,1},{2,0},{3,1},{4,0}}]];Show[g2]
```



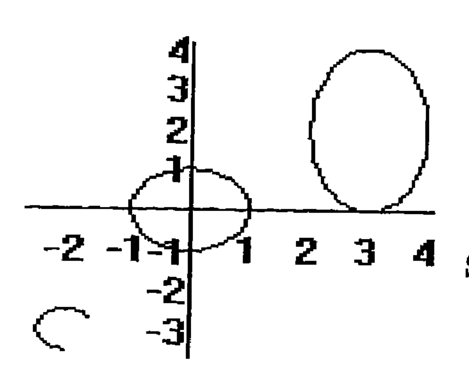
استخدام الأمر Graphics في رسم خطوط منكسرة تصل النقط المعطاة (0,0),(1,1),(2,0) ,(3,1),(4,0) على الترتيب ثم إظهار الرســـم باستخدام الأمر Show

```
In[26]:= g3=Show[Graphics[Rectangle[{-1,-1},{1,1}]],
          Axes->True,AxesLabel->{"x","y"}]
```



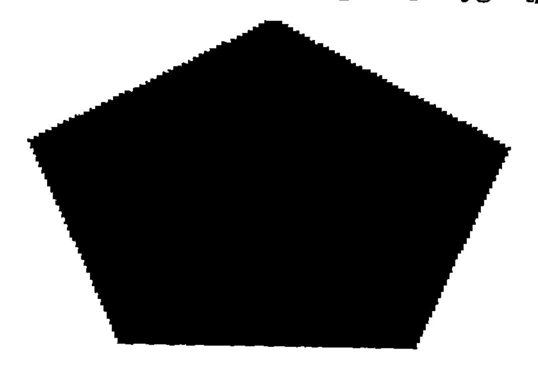
رســـــم مســـــتطيل إحداثيات رؤوس قطر فيه هى (1,1) , (-1,-1) وتم إضافة اختيـــــار عمل محـــاور وكتابة العنوان x على المحــــــور الأفقي والعنوان y على الراسي

```
In[27]:=one=Graphics[Circle[{0,0},1]];two=Graphics[Circle[{3,2},{1,2}]];
    three=Graphics[Circle[{-2,-3},.5,{Pi/4,3Pi/2}]];
    Show[one,two,three,Axes->True,AspectRatio->1]
```



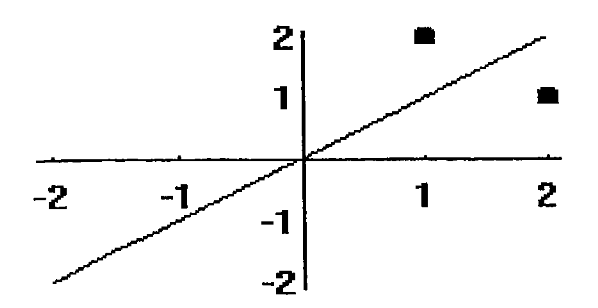
رسم دائرة مركزها النقطة (0,0) ونصف قطرها 1 وقطع ناقص مركزه النقطة (3,2) وقطاع من دائرة مركزها النقطة (-2,-3) ويمتد من الزاوية Pi/4 الى الزاوية 3Pi/2 ثم إظهار الرسوم الثلاثة معا باستخدام الأمر Show

```
In[28]:= pentagon=Table[N[{Sin[2 n Pi/5],Cos[2 n Pi/5]}],{n,5}];
           Show[Graphics[Polygon[pentagon]]]
```



عمل قائمة pentagon تحتوى على إحداثيات الشكل الخماسى ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[29]:= Show[Graphics[{Line[{{-2,-2},{2,2}}],PointSize[0.03],
            Point[{2,1}],Point[{1,2}]}],Axes->True]
```



إظهار رسم الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (2,2) , (-2,-2) مع رسم نقط بالحجم 0.03 عند الإحداثيات (2,1) , (1,2)

```
In[30]:= text1=Graphics[Text[RAAFAT RIAD RIZKALLA, {0.75,0.5}]];
            Show[text1,Axes->True]
```

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
RAAFAT RIAD RIZKALLA
0.25 0.5 0.75 1 1.25 1.5

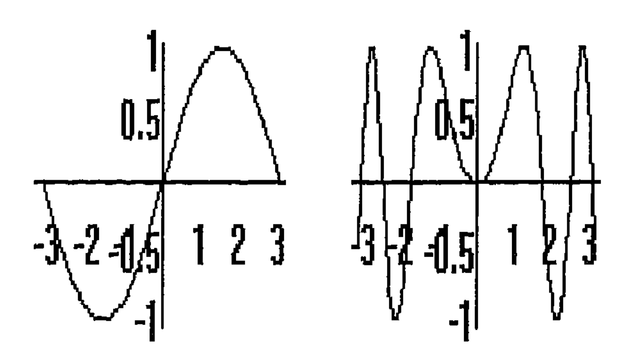
كتابة النص
RAAFAT RIAD RIZKALLA
متمركزا عند النقطة (0.75,0.5)

وفى ماثيماتيكا يمكن تكوين مصفوفة من أي بعد عناصرها أشكال مرسومة وذلك باستخدام الأمر **GraphicsArray** كالآتي :

GraphicsArray[{graph1,graph2,...}] عمل صف من الأشكال المرسومة graph1,graph2,...
GraphicsArray[{graph11,graph12,...}, {graph21,graph22,...},...] عمل مصفوفة من الأشكال المرسومة الصف الأول به الرسوم graph11,graph12,... والصف الثانى به الرسوم graph21,graph22,...

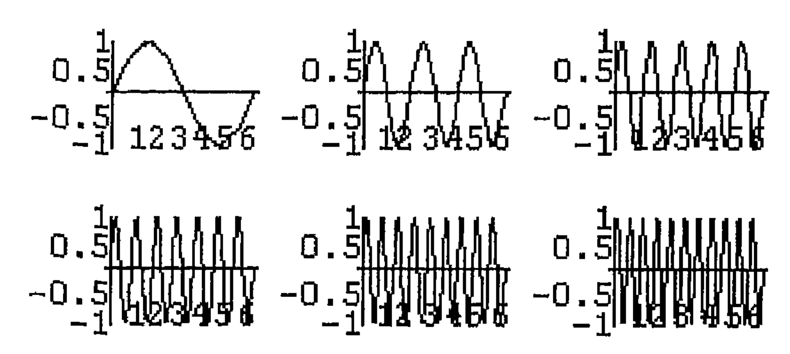
والأشكال المرسومة داخل المصفوفة **GraphicsArray** يتم عرضها بواسطة الأمـــر **Show** حيث تظهر الرسوم في مناطق مستطيلة مرتبة في صفوف ومع الأمر **GraphicsArray** يمكن إضافة اختيارات الأمر **Plot** بالإضافة الى الاختيار **GraphicsSpacing** وقيمته الفعالة **0.1** وهو يستخدم للتحكم في الفراغ بين مناطق الرسم المستطيلة المرسوم داخلها عناصر المصفوفة .

```
In[31]:= p1one=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
     p2two=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
     Show[GraphicsArray[{p1one,p2two}]]
```



رســم الدالة **sin x** ورسم الدالة **$\sin x^2$** ووضع الناتج في مصفوفة على صورة صف واحد ثم إظهار رسم الدالتين معا

```
In[32]:= psin[n_]:=Plot[Sin[n x],{x,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
               a=Partition[Table[psin[n],{n,1,11,2}],3];
                 Show[GraphicsArray[a]]
```



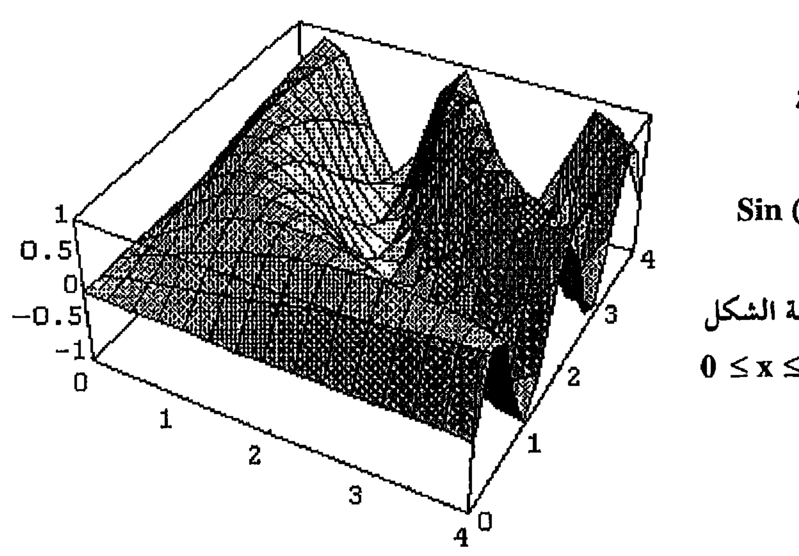
رسم الدالة **Sin(nx)** في النطاق $[0,2\pi]$ وذلك لقيم **n = 1,3,5,7,9,11** ثم وضع الرسوم في مصفوفة وعرضها في صفين بحيث يحتوى كل صف على ثلاثة رسوم

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

الدالة في متغيرين يرمز لها $z=f(x,y)$ حيث x,y متغيرات مستقلة , z متغـــير تابع ونطاق الدالة $f(x,y)$ يقع في المستوى xy ويمثله مجموعة النقط (x,y) المعرف عندها الدالة بينما مدى الدالة $f(x,y)$ يقع على محور z في الفراغ ورسم الدالة $z = f(x,y)$ هو عبارة عن سطح في الفراغ يمثله مجموعة النقط (x,y,z) التى تحقق المعادلة $z = f(x,y)$ • وفى ماثيماتيكا يمكن رسم الدوال فى الفراغ باستخدام الأمر Plot3D كالآتي :

Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

In[1]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}]



رســـم الدالة

Sin (x y)

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$

وكما في حالة الأمر **Plot** للرســـم في المســـتوى فإنه يوجد العديد من الاختيارات التـــي تتحكم في شـــكل الرســـم في الفراغ ويمكن الاستعلام عن الاختيارات الفعالـــة للأمـــر **Plot3D**باستخدام الأمر **Options** كالآتي :

In[2]:=Options[Plot3D]

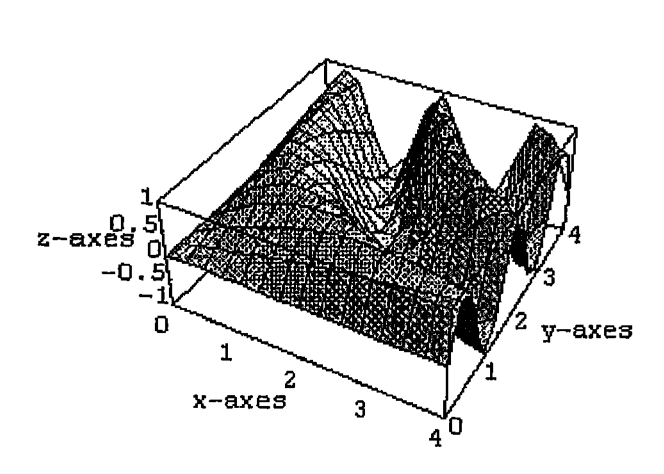
{AmbientLight -> GrayLevel[0], AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, AxesEdge -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic, Boxed -> True, BoxRatios -> {1, 1, 0.4},. BoxStyle -> Automatic, ClipFill -> Automatic, ColorFunction -> Automatic, ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, FaceGrids -> None, HiddenSurface -> True, Lighting -> True, LightSources -> {{{1., 0., 1.}, RGBColor[1, 0, 0]}, {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]}, {{0., 1., 1.}, RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True, MeshStyle -> Automatic, PlotLabel -> None, PlotPoints -> 15, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, Plot3Matrix -> Automatic, Prolog -> {}, Shading -> True, SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic, ViewCenter -> Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, ViewVertical -> {0., 0., 1.}, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction}

والآن نعرض بالتفصيل بعض الاختيارات المستخدمة مع الأمر **Plot3D** والقيمة الفعالة لكـــل منها بالإضافة الى قيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم في الفراغ وهذه الاختيـــارات يمكن استخدامها أيضا مع أمر إعادة الرسم **Show** .

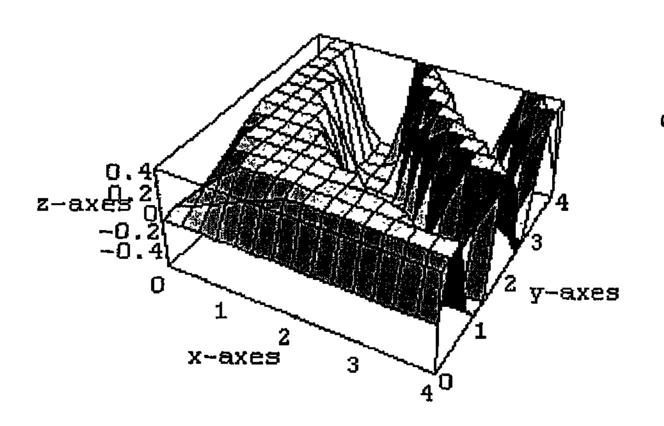
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Axes->True	رسم محاور الإحداثيات x , y , z	**Axes->False**
AxesLabel->None	كتابة عناوين على المحاور	**AxesLabel->"z-label"** **-AxesLabel >{"x","y","z"}**
PlotLabel->None	كتابة عنوان على الرسم	**PlotLabel->" any label "**
PlotPoints->15	عدد نقط العينة في الاتجاهين x,y والتي يتم عندها حساب قيم الدالة وهذا الاختيار لا يستخدم مع الأمر **Show**	**PlotPoints->n** **PlotPoints->{nx,ny}**
PlotRange->Automatic	مدى الإحداثيات المستخدمة في الرسم	**PlotRange->{zmin,zmax}** **PlotRange->{{xn,xx}, {yn,yx},{zn,zx}}** **PlotRange->All**
Ticks->Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	**Ticks->None** **Ticks->{xt,yt,zt}** حيث **xt , yt , zt** يمكن أن تأخذ القيم **None** أو **Automatic**

```
In[3]:=rp1=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

استخدام المتغير **rp1** كمخزن
لرســـــــــم الدالة
Sin(x y)
على المنطقة المستطيلة الشكل
$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 4$
مع كتابة العناوين
x-axes , y-axes , z-axes
على محاور الإحداثيات

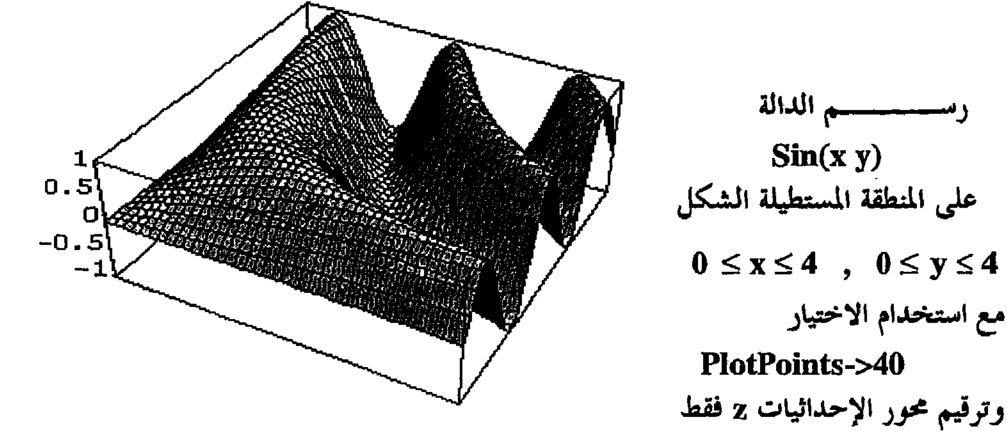



```
In[4]:=rp2=Show[rp1,PlotRange->{-0.5,0.5}]
```



استخدام المتغير **rp2** كمخزن
يوضع داخله أمر إعادة الرسم
Show للشكل السابق **rp1**
مع تغيير مدى الرسم بالاختيار
PlotRange->{-0.5,0.5}

```
In[5]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotPoints->40,
              Ticks->{None,None,Automatic}]
```



رســـــــم الدالة

Sin(x y)

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$

مع استخدام الاختيار

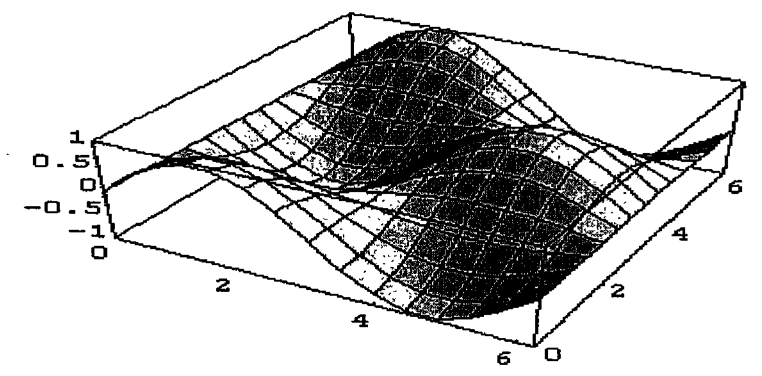
PlotPoints->40

وترقيم محور الإحداثيات z فقط

والأشكال الناتجة من الأمر **Plot3D** يمكن النظر أليها على أنها صور فوتوغرافيـــة للســـطوح وتوجد بعض الاختيارات مع الأوامر **Plot3D, Show** يمكن من خلالها فحص السطوح من مواضع مختلفة ومن أهم هذه الاختيارات هو الاختيار **ViewPoint** لتحديد إحداثيات النقطة فى الفراغ التى يتم وضع آلة التصوير عندها لالتقاط صور للسطح وبالتالى يمكن التعـــرف علــى الملامح المختلفة للسطح عن طريق وضع الكاميرا فى أماكن مختلفة ، ويقوم ماثيماتيكـــا بوضـــع السطح داخل صندوق باستخدام الاختيار **Boxed** وأبعاد هذا الصندوق يمكن التحكم فيهـــا بواسطة الاختيار **BoxRatios** .

قيم أخرى للاختيار	وظيفة الاختيار	Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة
ViewPoint->{xv,yv,zv} تحديد آي نقطة (xv,yv,zv) في الفراغ	تحديد إحداثيات نقطة في الفراغ يتم النظـــر من عندها الى السطح وهـــذه الإحداثيـــات تكون بالنسبة الى مركز الصندوق	ViewPoint->{1.3,-2.4,2}
Boxed->False	رسم صندوق حـــول السطح	Boxed->True
BoxRatios->{nx,ny,nz} جعل النسبة nx:ny:nz بين أطوال اوجه الصندوق	تحديـــد النســـبة بـــين أطوال اوجه الصندوق في اتجاه المحاور x,y,z على الترتيب	BoxRatios->{1,1,0.4}

In[6]:=rp3=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2P}]



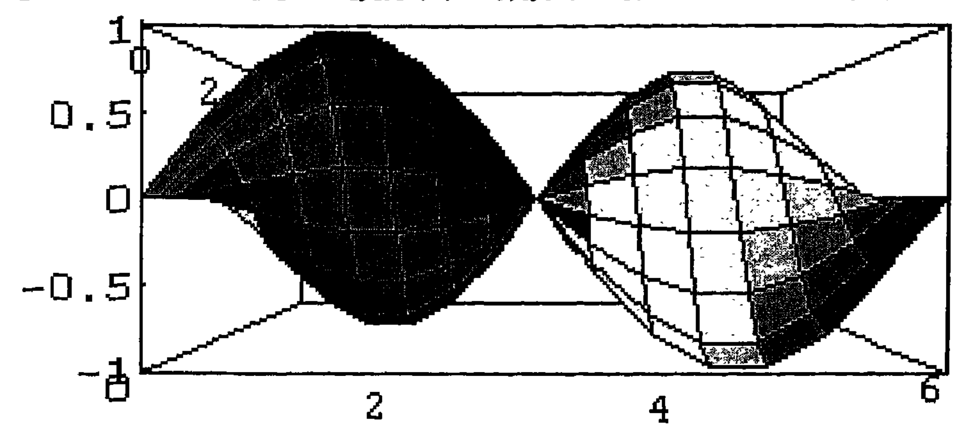
استخدام المتغير rp3 كمخزن لرسم سطح الدالة sin(x) cos(y) في النطاق

$0 \le x \le 2\pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات الفعالة (2 , 2.4- , 1.3)



```
In[7]:=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi},ViewPoint->{0,-2,0}]
```

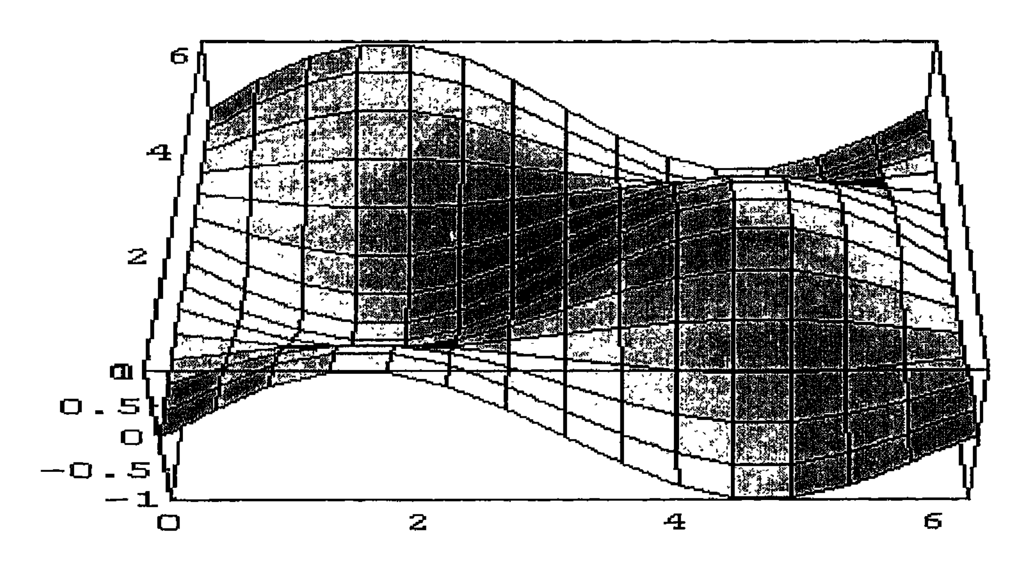


رســــــم سطح الدالة **sin(x) cos(y)** فى النطاق

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

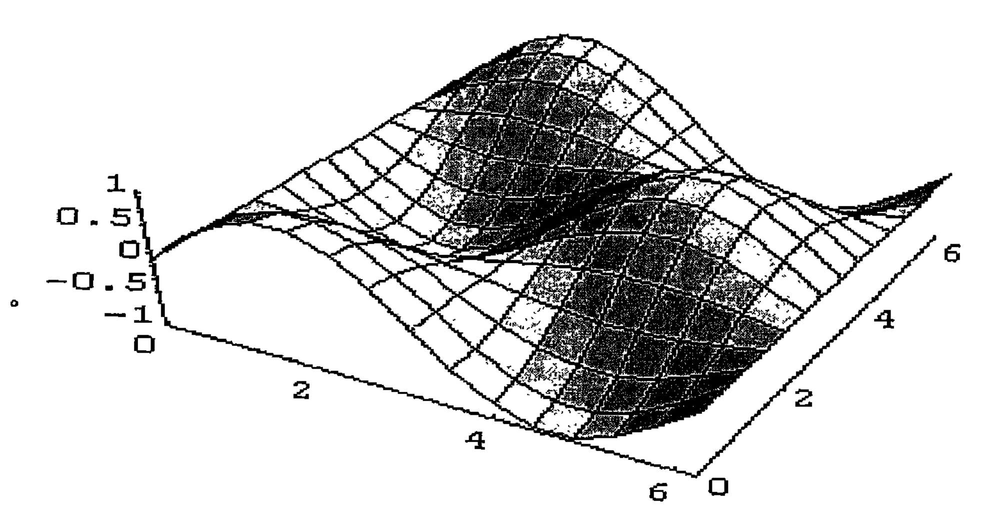
حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات (0, -2, 0)

```
In[8]:=Show[rp3,ViewPoint->{0,-4,4}]
```



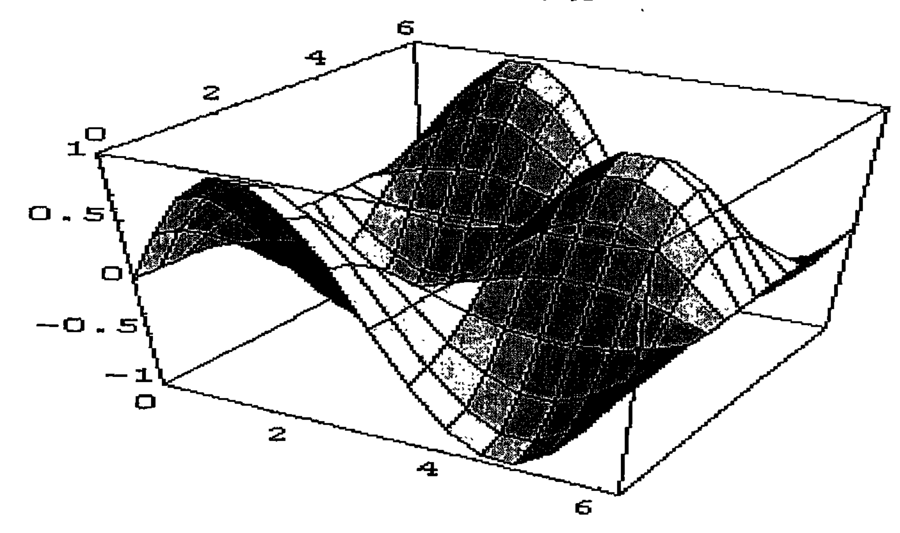
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp3** حيث يتم تغيير موضع آلة التصوير الى الإحداثيات (0 , -4 , 4)

```
In[9]:=Show[rp3,Boxed->False]
```



استخدام الأمر Show فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير rp3 حيث يتم عرض السطح فقط وبدون رسم صندوق من حوله وذلك عن طريق الاختيار Boxed->False

```
In[10]:=Show[rp3,BoxRatios->{1,1,1}]
```

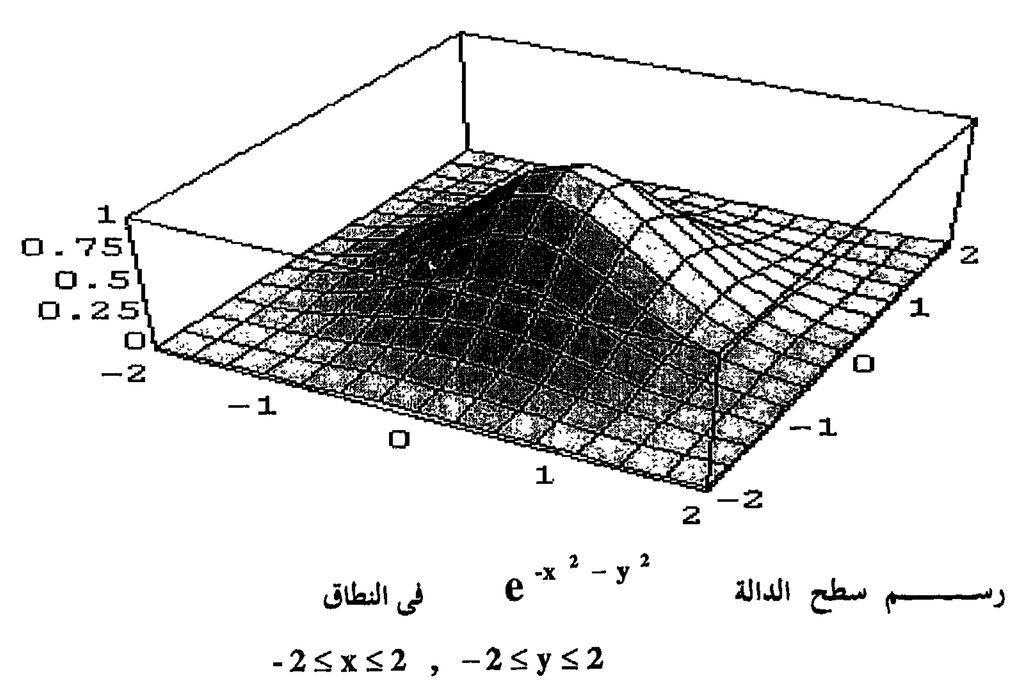


استخدام الأمر Show فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير rp3 حيث يتم عرض السطح داخل صندوق مكعب الشكل وذلك عن طريق الاختيار BoxRatios->{1,1,1}

وعند رسم السطوح فى الفراغ يمكن التحكم فى الأجزاء المختفية من السطح باستخدام الاختيار **HiddenSurface** كما يمكن عمل ظلال للسطح باستخدام الاختيار **Shading** أو عمل شبكة على السطح فى اتجاه المحاور **x,y** وذلك باستخدام الاختيار **Mesh**

قيم أخرى للاختيار	وظيفة الاختيار	اسم الاختيار **Option Name** وقيمته الفعالة **Default value**
HiddenSurface->False	منع ظهور الأجزاء المختفية من السطح	**HiddenSurface->True**
Shading->False	عمل ظلال للسطح	**Shading->True**
Mesh->False	رسم شبكة على السطح فى اتجاه المحاور **x,y**	**Mesh->True**

```
In[11]:=rp4=Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

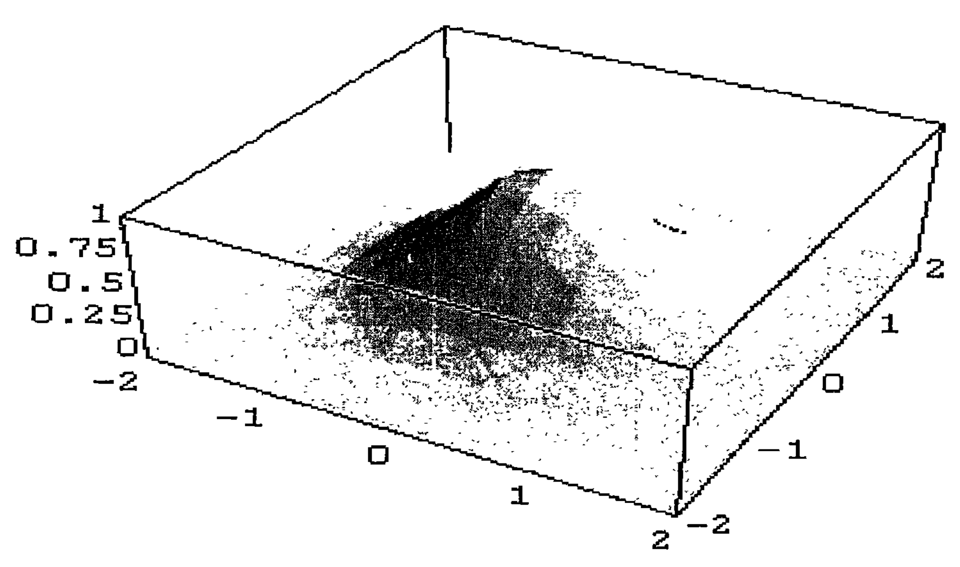


رسم سطح الدالة $e^{-x^2-y^2}$ فى النطاق

$$-2 \le x \le 2 \quad , \quad -2 \le y \le 2$$

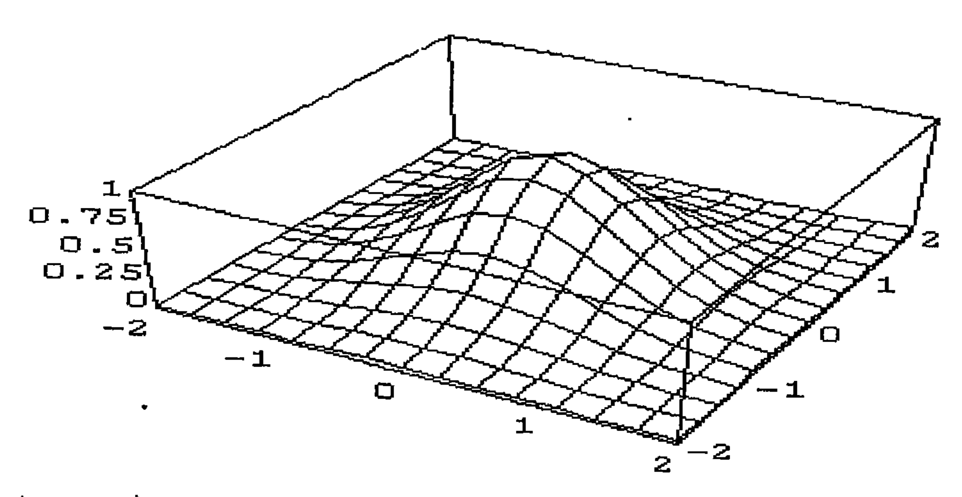
ونلاحظ وجود شبكة على السطح فى اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار الفعال **Mesh->True**

In[12]:=Show[rp4,Mesh->False]



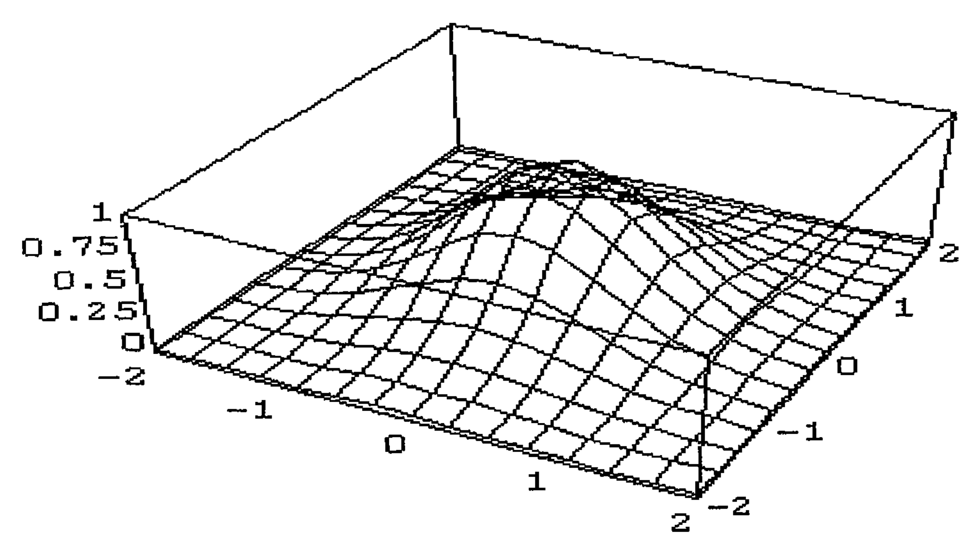
استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون رسم شبكة على السطح في اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار Mesh->False

In[13]:=Show[rp4,Shading->False]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون تظليل السطح وذلك نتيجة الاختيار Shading->False

In[14]:=Show[rp4,HiddenSurface->False]

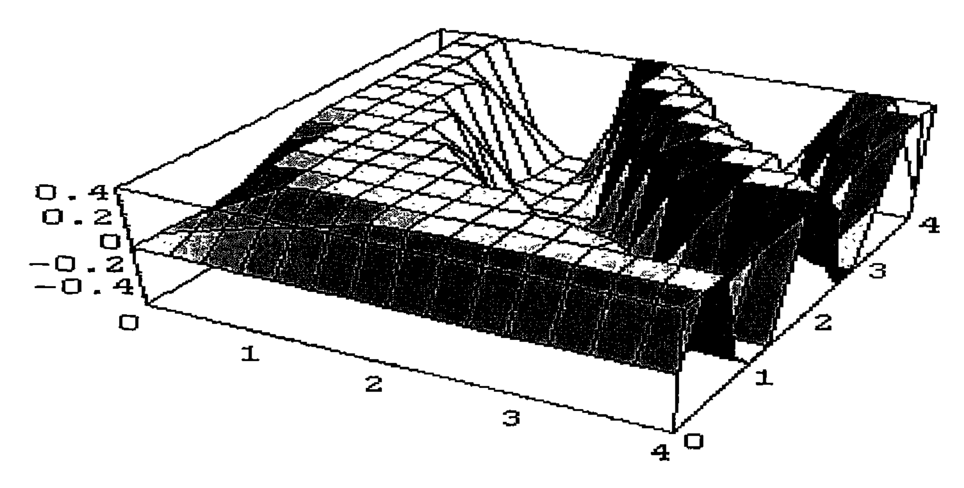


استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم إظهار الأجزاء المختفية من السطح وذلك نتيجة الاختيار **HiddenSurface->False**

وعند رسم السطوح فى الفراغ يقوم ماثيماتيكا بقطع أجزاء السطح الخارجة عن الصندوق ويمكن توضيح الأماكن التى تم فيها قطع السطح باستخدام الاختيار **ClipFill** كالآتي :

قيم أخرى للاختيار	وظيفة الاختيار	Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة
ClipFill->None **ClipFill->GrayLevel[i]** **ClipFill->RGBColor[r,g,b]** **ClipFill->{bootom,top}**	توضيح الأماكن التى تم عندها قطع السطح وفقا للمواصفات الفعالة للرسم	**ClipFill->Automatic**

In[15]:= rp5=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotRange->{-0.5,0.5}]

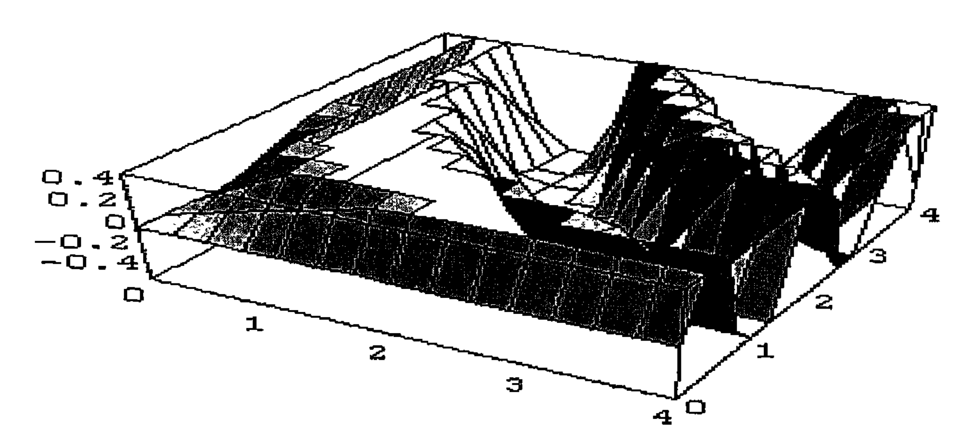


استخدام المتغير **rp5** كمخزن لرســم الدالة **Sin(x y)** على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$$

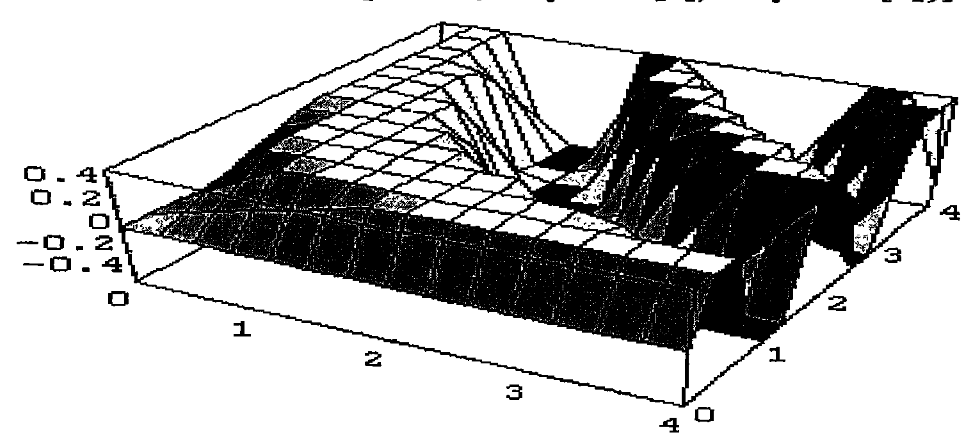
مع تغيير مدى الرســــم بالاختيار **PlotRange->{-0.5,0.5}**

In[16]:= Show[rp5,ClipFill->None]



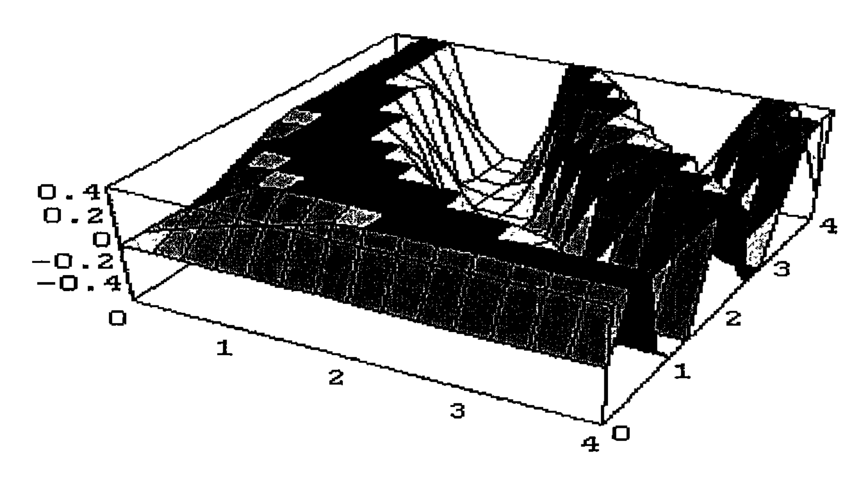
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرســم المخزون فى المتغير **rp5** حيث يتم عرض الســطح بحيث تترك الأجزاء المقطوعة من الســطح واضحــة بدون تظليل وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->None**

In[17]:= Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأسود ومن أعلى باللون الأبيض وذلك نتيجة الاختيار ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}

In[18]:=Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}]



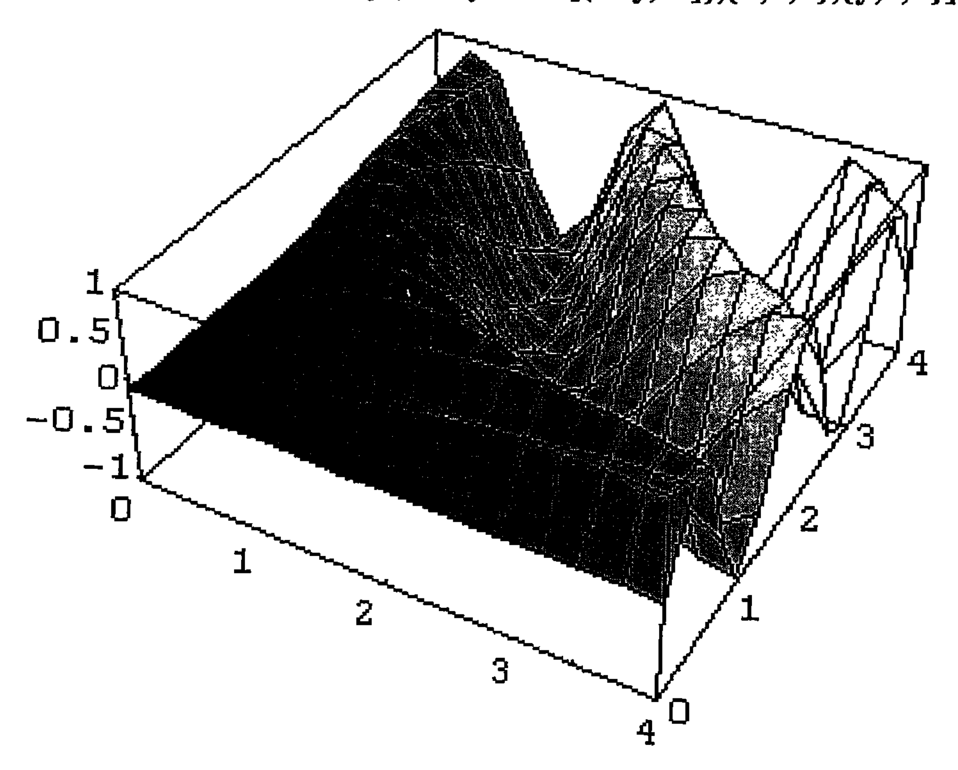
استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأبيض ومن أعلى باللون الأسود وذلك نتيجة الاختيار ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}

ويستطيع ماثيماتيكا تظليل كل جزء من سطح الدالة وفقا لموصفات معينـــة وذلـــك باســـتخدام الأمر Plot3D في الصورة الآتية :

Plot3D[{f(x,y),s},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

رســـــم ســـــطح الدالة f(x,y) مع تظليل السطح وفقا للدالة s

In[19]:=Plot3D[{Sin[x y],GrayLevel[(x+y)/8]},{x,0,4},{y,0,4}]



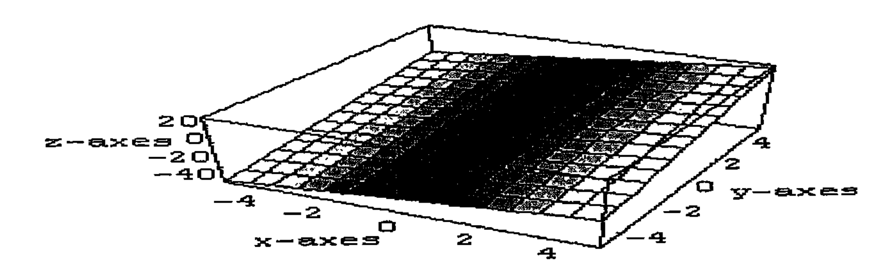
رســـــم الدالة Sin(x y) على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 4$

وبحيث يتم تظليل ســـطح الدالة وفقا للدالة GrayLevel[(x+y)/8]

حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل للسطح

```
In[20]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[x]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
         AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

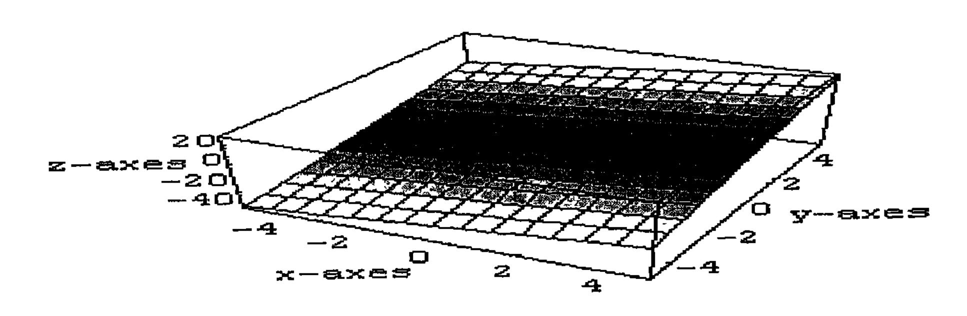


رســـــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5 \quad , \quad -5 \leq y \leq 5$$

وبحيث يتم تظليل ســـطح المســـتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5 حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى فى اتجاه محور x كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

```
In[21]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[y]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
         AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



رســـــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5 \quad , \quad -5 \leq y \leq 5$$

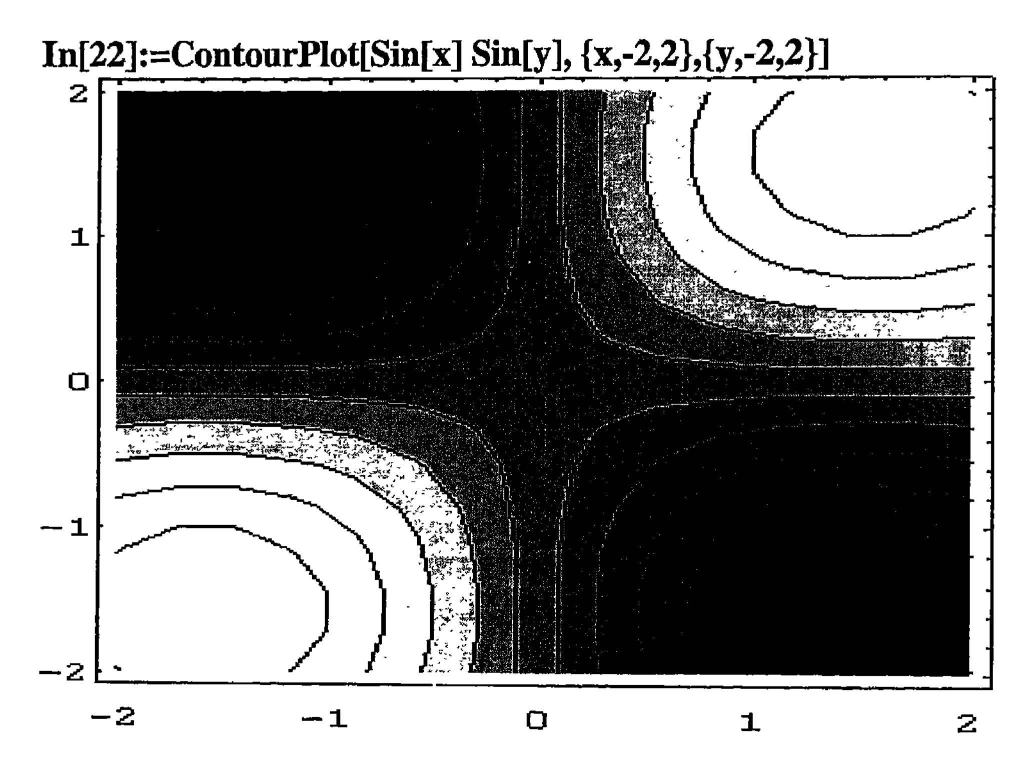
وبحيث يتم تظليل ســـطح المســـتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5 حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى فى اتجاه محور y كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

وعندما نحاول التعمق فى فهم طبيعة سـطح خاص فانه يكون من المفيد النظـر الى السـطح بطرق مختلفة والأمر **Plot3D** يقدم لنا صورة فى الفراغ للسطح وفى برنـامج ماثيماتيكـا يمكن الحصول على خريطة لمقاطع السطح بطريقة خطوط الكونتور التى تربط النقط الواقعة على السـطح والتى لها نفس الارتفاع ويتم ذلك عن طريق الأمر **ContourPlot** كالآتي:

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

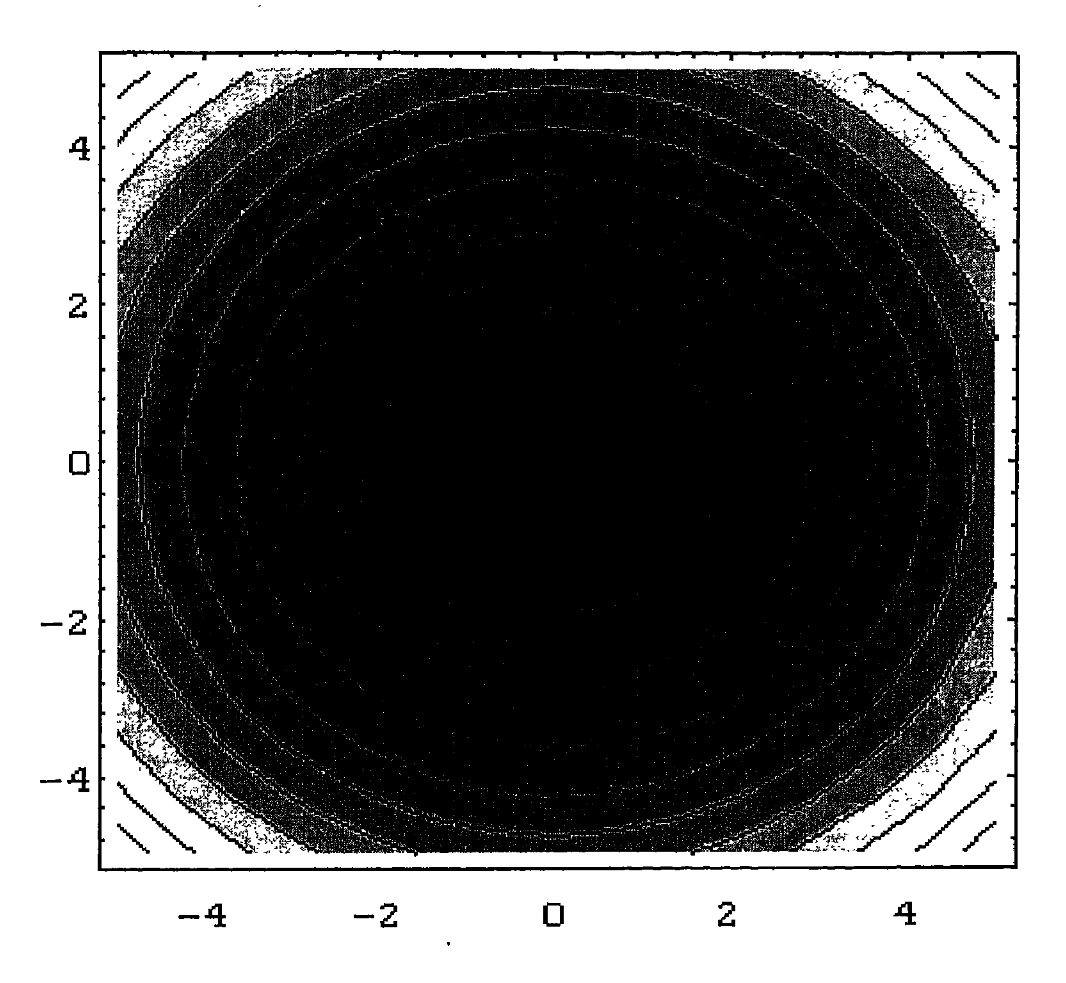
رسـم خطوط الكونتور للدالة **f (x,y)** فى النطاق من **= xmin** الى **x = xmax**
ومن **y = ymin** الى **y = ymax**

In[22]:=ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x,-2,2},{y,-2,2}]



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y) = Sin(x)\ Sin(y)$ بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة
$-2 \le x \le 2 \quad , \quad -2 \le y \le 2$

```
In[23]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x,-5,5},{y,-5,5}]
```



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$$

٣ • رســم الدوال البارامترية Parametric Plots

إذا كان f(x) دالة وحيدة القيمة single valued فإن المعادلات التى علــى الصــورة y = f(x) تصف منحنيات فى المستوى يقطعها أي خط رأسي مرة واحدة فقـــط فـــى نطـــاق التعريف ، والإحداثى y لكل نقطة يكون دالة فى الإحداثى x ولكن توجد منحنيات اكـــثر تعقيدا تضاعف نفسها ومثل هذه المنحنيات يمكن دراستها بسهوله باستخدام الصورة البارامترية ويتم ذلك بجعل المتغيرات x , y دوال فى متغير آخر t مثل x = g(t) , y = h(t) وكل قيمة للمتغير t تعين قيمة للمتغيرات x , y يمكن اعتبارها إحداثيات نقطة فى المستوى xy وفئة جميع النقط (g(t),h(t)) تكون منحنى والمعادلتان x = g(t) , y = h(t) تســميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى والمتغير t يسمى بارامتر • وبرنامج ماثيماتيكا قادر على رســم الدوال فى المستوى بالصورة البارامترية وذلك باستخدام الأمر ParametricPlot كالآتي :

```
ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]
```

رسم الدالة المعطاة بالصورة البارامترية

x=fx , y=fy , $tmin \le t \le tmax$

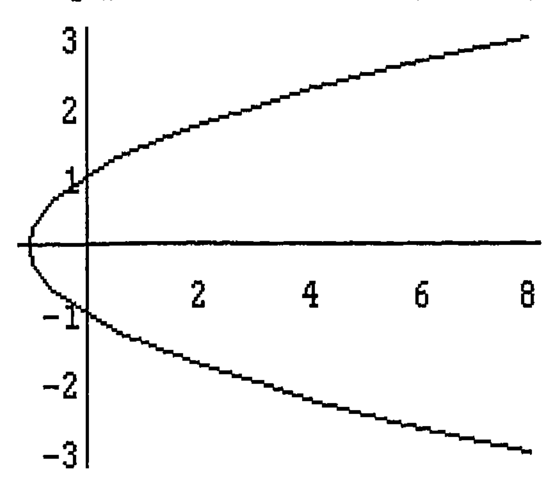
حيث fy , fx دوال فى البارامتر t

```
ParametricPlot[{{fx, fy}, {gx, gy}, ...}, {t, tmin, tmax}]
```

رسم اكثر من دالة معطاة بالصورة البارامترية



```
In[1]:=ParametricPlot[{t^2-1,t},{t,-3,3}]
```



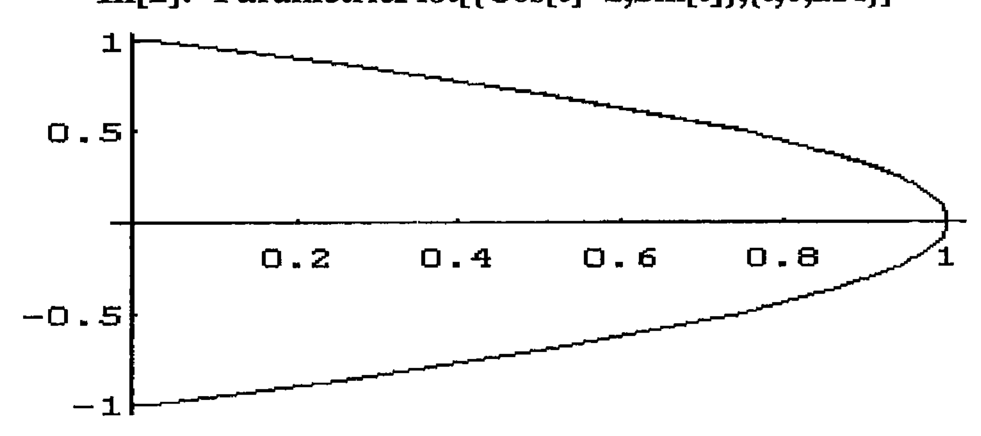
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=t^2-1 \quad , \quad y=t \quad , \quad -3\leq t\leq 3$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$x^2=x+1 \quad , \quad -1\leq x\leq 8$

```
In[2]:=ParametricPlot[{Cos[t]^2,Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



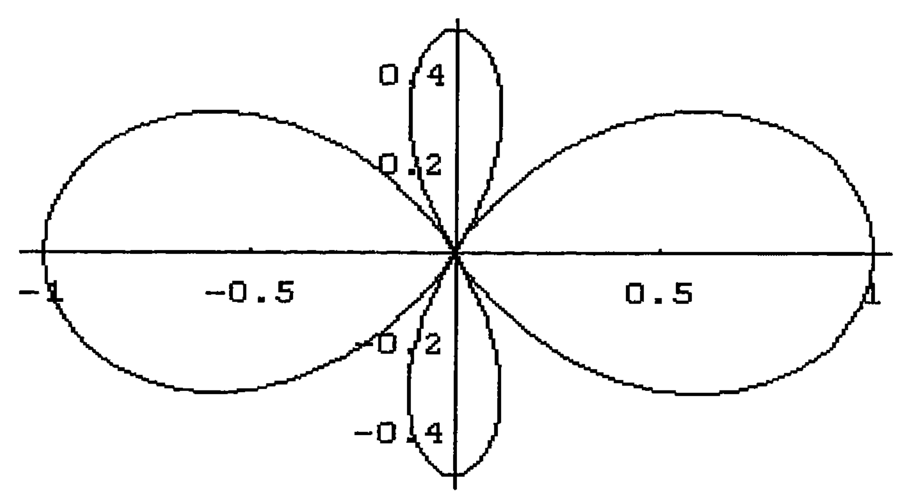
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=\cos^2(t) \quad , \quad y=\sin(t) \quad , \quad 0\leq t\leq 2\pi$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$y^2=1-x \quad , \quad 0\leq x\leq 1$

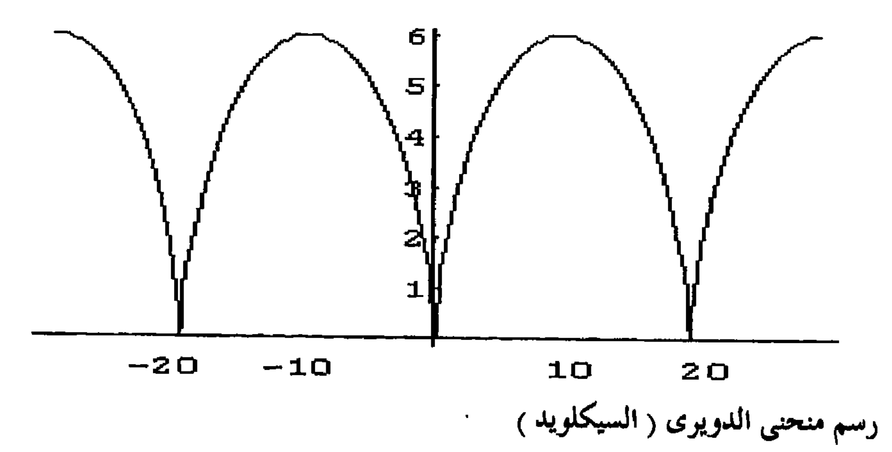
```
In[3]:=r[t_]:=(3Cos[t]^2-1)/2;
       ParametricPlot[{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم المنحنى فى الصورة القطبية

$$r=\frac{3\cos^2(t)-1}{2} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

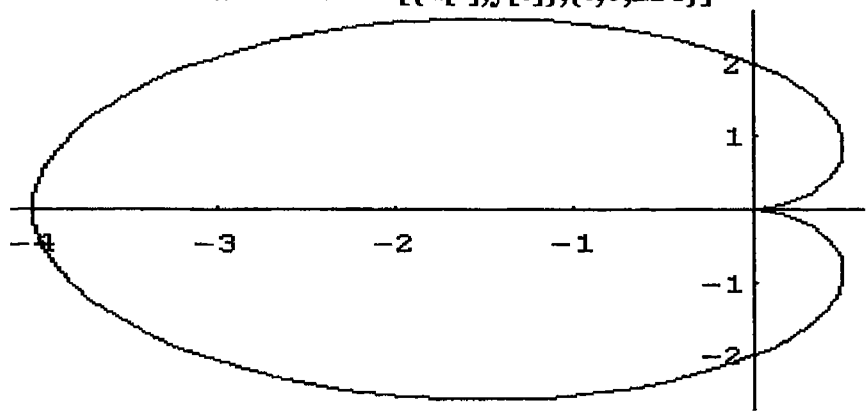
```
In[4]:=ParametricPlot[{3(t-Sin[t]),3(1-Cos[t])},{t,-3Pi,3Pi}]
```



رسم منحنى الدويرى (السيكلويد)

x = 3(t-sin(t))
y = 3(1-Cos(t)) , $-3 \le t \le 3$

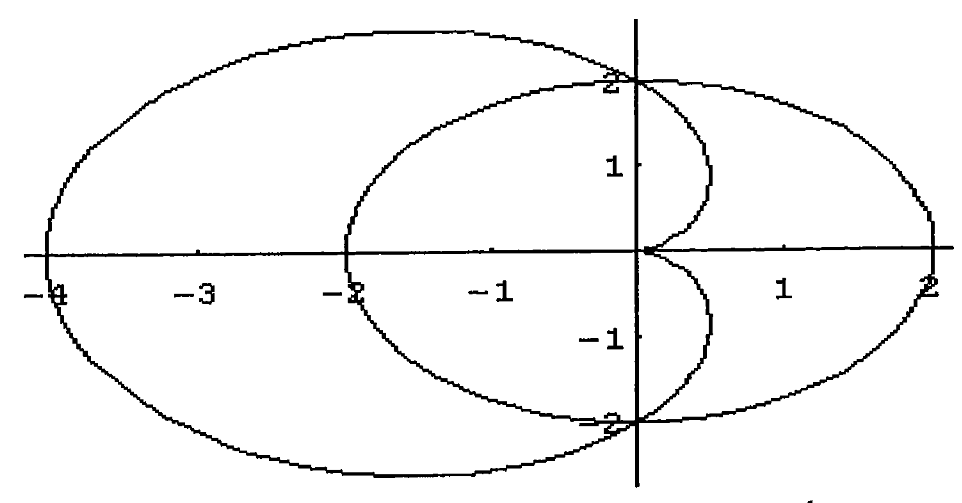
```
In[5]:=x[t_]:=2(Cos[t]-Cos[t]^2);
       y[t_]:=2(Sin[t]-Sin[t] Cos[t]);
       ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد المعطى بالصورة البارامترية

$$x(t) = 2\cos(t)\ [1 - \cos(t)]$$
$$y(t) = 2\ \sin(t)\ [1 - \cos(t)]$$

```
In[6]:=ParametricPlot[{{x[t],y[t]},{2Cos[t],2Sin[t]}},{t,0,2Pi}]
```

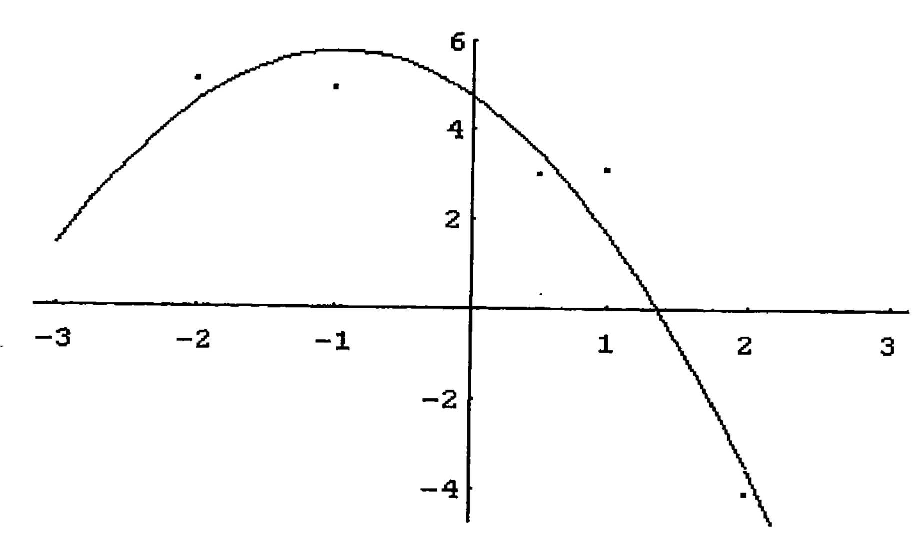


رسم منحنى الكارديويد السابق مع الدائرة المعطاة بالصورة القطبية

$$x(t) = 2\cos(t)$$
$$y(t) = 2\ \sin(t)$$

الباب السادس

ماثيماتيكا والتحليل العددى



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

٢. إيجاد جذر تقريبى — Numerical Root Finding

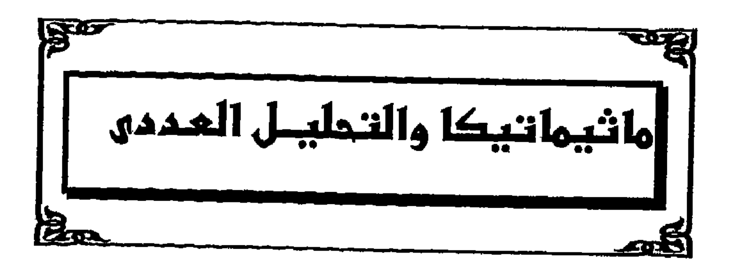
٣. إيجاد القيم الصغرى — Numerical Minimization

٤. الحســـــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

٥. التكـــامل العـــددى — Numerical Integration

٦. التقريب بالمربعات الصغرى — Least - squares

الباب السادس



ماثيماتيكا والتحليل العددى

التحليل العددى Numerical Analysis هو أحد فروع الرياضيات التى تعتمد بقوة على التطورات الحديثة فى علم الكومبيوتر وعلى التطبيقات فى استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية المختلفة ، ومن اكثر مميزات ماثيماتيكا هو المقدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفى صورة رمزية Exact Symbolic Results للحسابات الرياضية المختلفة وفى بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ولمثل هذه الحسابات فإن ماثيماتيكا يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة N والتى تستخدم بالصورة

expr//N أو **N[expr]**

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية expr والدالة

N[expr,n]

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية expr مقربة الى n من الأرقام العشرية وفى هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحصول على قيم تقريبية لنتائج العمليات الرياضية فى مجالات مختلفة من التحليل العددى ،

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

فى برنامج ماثيماتيكا يمكن حل معادلات كثيرات الحدود باستخدام الأمر Solve كما عرفنا فى الباب الثالث وفى حالة عدم الحصول على حل صريح للمعادلة أو مجموعة المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2 = 0$ والحصول على الجذور

```
In[1]:= Solve[x^2-3x+2==0,x]
Out[1]={{x -> 1}, {x -> 2}}
```

الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[2]  := Solve[x^5+7x+1==0,x]
Out[2] = ToRules[Roots[7 x + x^5  == -1, x]
```

باستخدام الدالة N نحصل على قيمة عاددية تقريبية للحل

```
In[3]  :=N[%]
Out[3] ={{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
         {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
         {x -> -0.142849},
         {x -> 1.1845 - 1.15139 I}, {x -> 1.1845 + 1.15139 I}}
```

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بدون الحاجة الى إيجاد الحل المضبوط أولا وذلك باستخدام الأمر NRoots كالآتي :

للحصول على حل عددى تقريبى لمعادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنسبة الى المتغير x	NRoots[poly= = 0 ,x]
للحصول على حل عددى تقريبى لمعادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنسبة الى المتغير x وبدقة n رقم عشرى	NRoots[poly= = 0,x,n]

للحصول على حل عددى تقريبى لمعادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x]
Out[4]=
    x = = -1.11308 - 1.15173 I ||
    x = = -1.11308 + 1.15173 I || x = = -0.142849 ||
    x = = 1.1845 - 1.15139 I || x = = 1.1845 + 1.15139 I
```

لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال In[4] فى صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

```
In[5]:=ToRules[%]
Out[5]=
    Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
             {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
             {x -> -0.142849},
             {x -> 1.1845 - 1.15139 I},
             {x -> 1.1845 + 1.15139 I}]
```

٢. إيجاد جذر تقريبى Numerical Root Finding

الأمر **NRoots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية ...) يكون اكثر صعوبة ، وبرنامج ماثيماتيكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو لمجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية x_0 وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** فى إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ مبتدئا من نقطة البداية x_0 وبمعلومية قيمة المشتقة $f'(x)$ يتم الحصول على متتابعة من القيم x_n حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة اكثر من جذر ، ومتتابعة القيم x_n تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \; n = 0\,,1\,,\,...$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة $f'(x)$ بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

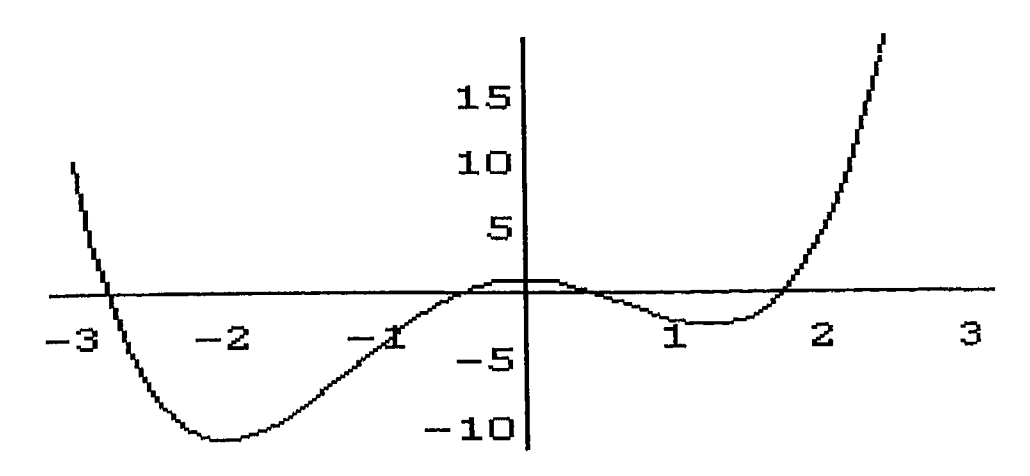
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) \qquad , \; n = 1,2,...$$

حيث x_1 , x_0 قيم ابتدائية يتم تحديدها .

وفي الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر **FindRoot**

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من النقطة $x = x_0$	**FindRoot[lhs= =rhs,{x,x0}]**
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من النقطة **x = xstart** وبحيث يتم البحث داخل النطاق من **x = xmin** الى **x = xmax** ويتـــم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار	**FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]**
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من القيـــم الابتدائية x_1 , x_0 باستخدام طريقة القاطع	**FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]**
البـــحث عن جذر لمجموعة المعـــادلات **eqn1 , eqn2 , ...** فى وقت واحد مبتدئا من نقط البداية x_0 , y_0 , ...	**FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]**

```
In[1]:=f[x_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]
```



تعريف الدالة f(x) وهى كثيرة حـــــدود من الدرجـــــة الرابـــعة ثم رســـــــم الدالـــة فى الفترة (-3,3)

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=-2.5

```
In[2]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,-2.5}]
Out[2]={x -> -2.76251}
```

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=0.1

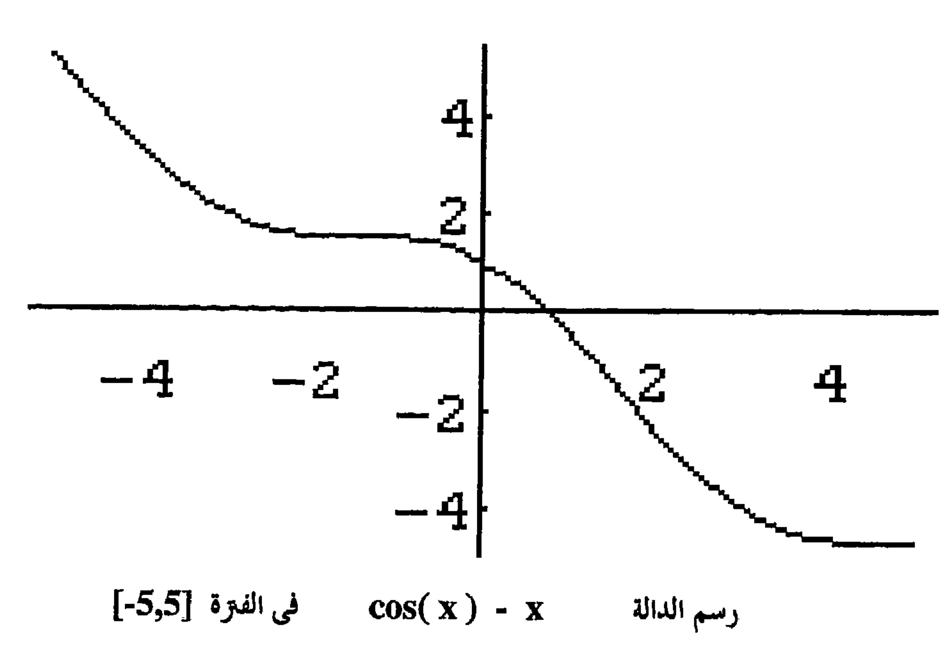
```
In[3]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,0.1}]
Out[3]={x -> 0.483179}
```

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x = 2

```
In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]
Out[4]={x -> 1.71594}
```



In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]



رسم الدالة $\cos(x) - x$ فى الفترة [-5,5]

للحصول على جــذر عددى تقريبى للمعادلة $\cos x = x$ بالقرب من $x=0$

```
In[6]:=FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]
Out[6]={x -> 0.739085}
```

للحصول على جذر عددى تقريبى للمعادلة مبتدئا من نقط البداية $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

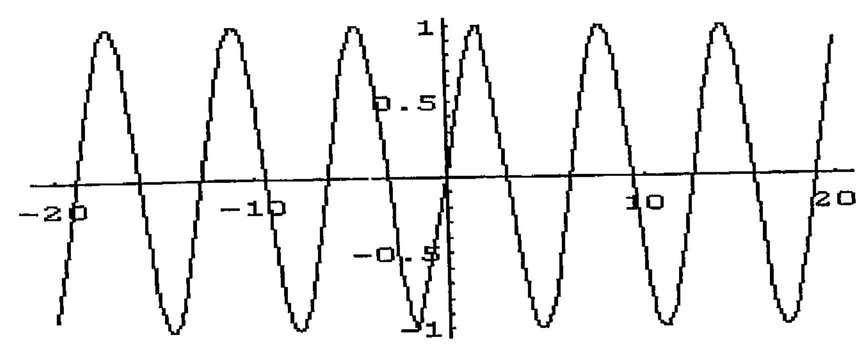
```
In[7]:=FindRoot[Cos[x]= =x,{x,{0,1}}]
Out[7]={x -> 0.739085}
```

للحصول على جذر عددى تقريبى للمعادلة $x^2 - 1 = 0$ بالقرب من نقطة بداية يتم اختيارها عشوائيا داخل الفترة (0,1)

```
In[8]:=FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]
Out[8]={x -> 1.}
```



In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة sin(x) يقطع محور x في عدد لانهائي من النقط

$$x = n\pi,\ n = 0,\ \pm1,\ \pm2, ...$$

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 0 بالقرب من نقطة البداية x=3

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]
Out[10]={x -> 3.14159}

المعادلة sin x = 2 ليس لها حل حقيقى ولكن لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بأن طريقة نيوتن لا تقترب من الجذر

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]
Out[11]=FindRoot::cvnwt:
Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 2 بالقرب من نقطة البداية x=I

In[12]:=FindRoot[Sin[x]= =2,{x,I}]
Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

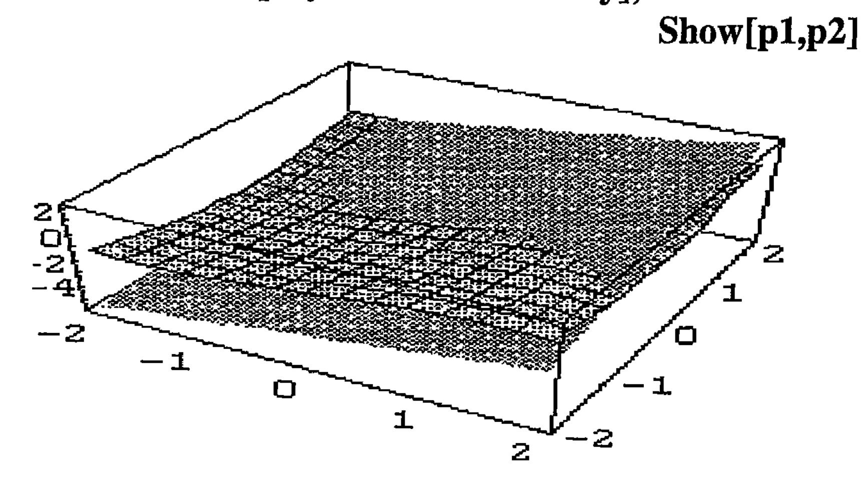
الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 0 بالقرب من نقطة البداية x=3 وداخل الفترة [2.5,3.5] فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه يوجد جذر فى هذه الفترة

In[13]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,3,2.5,3.5}]
Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة $\sin x = 0$ مبتدئا من النقطة x=1 وداخل الفترة [0.5,1.5] فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه لا يوجد جذر فى هذه الفترة

```
In[14]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,1,0.5,1.5}]
Out[14]=FindRoot::regex:
Reached the point {-0.557408}
which is outsidethe region {{0.5, 1.5}}.
{x -> -0.557408}
```

```
In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},
DisplayFunction->Identity];
p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,
          DisplayFunction->Identity];
                                        Show[p1,p2]
```



فى هذا المثال تم استعراض رسم الدالة $\sin(x) - \cos(x)$ وتخطيط السطح الناتج بخطوط شبكية مع رسم الدالة $x + y - 1$ بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا فى شـــكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين . ولإيجاد حـــل عددى تقريبى للمعادلتين معا فى آن واحد مبتدئا من نقط البداية $y = 0.2$, $x = 0.1$

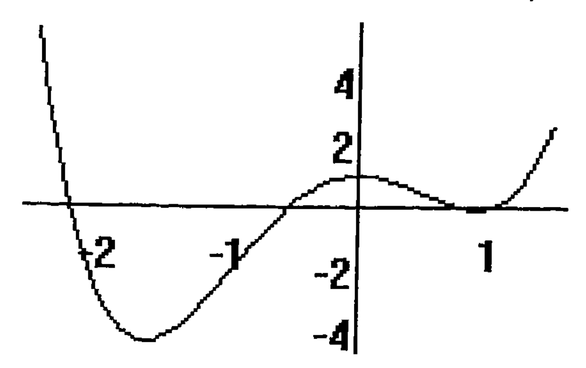
```
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]
Out[16]={x -> 1.2854, y -> -0.285398}
```

٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

فى برنامج ماثيماتيكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقـــط تنعـــدم عندها الدالة وفى بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالـــــة $f(x)$ اصغر ما يمكن آي إيجاد نقط نهايـــــات صغرى محليـــــة **local minimum** للدالـــة $f(x)$ ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشـــتقة الدالـــة $f(x)$ ، وماثيماتيكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالـــة $f(x)$ بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هـــذه النقـــط وباســـتخدام العلاقـــة $max(f) = - min(-f)$ يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة $f(x)$.

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
البحث عن نقطة نهاية صغـــرى محليـــة للدالـــة f بالقرب من نقطة البدايـــة x_0 وحســـاب القيمـــة الصغرى للدالة.	FindMinimum[f,{x,x0}]
البحث عن نقطة نهاية صغـــرى محليـــة للدالـــة f بالقرب من نقطة البداية x=xstart وبحيث يتم البحث فقط داخل النطاق مـــن x=xmin الى x=xmax وحساب القيمة الصغرى للدالة .	FindMinimum[f,{x,xstart,xmin, xmax}]
البحث عن نقطة نهاية صغـــرى محليـــة للدالـــة f بالقرب من القيم الابتدائية x_1 , x_0 وحســـــاب القيمـــة الصغـــرى للدالـــة ويســـتخدم الأمـــر FindMinimum بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة f	FindMinimum[f,{x,{x0,x1}}]
البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية لدالة فى اكثر من متغير f(x , y ,...) بـــالقرب مـــن القيـــم الابتدائيـــــــة $x=x_0$, $y=y_0$, ... وحساب القيمة الصغرى للدالة .	FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]

```
In[1]:= f[x_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]
```



تعريف الدالة
$$f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$$
ثم رسمها فى الفترة [-2.5,1.5]
ونلاحظ أن الدالــــة لها نقطتيى نهاية صغرى محلية فى نطاق التعريف

```
In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}]
Out[2]={-4.24791, {x -> -1.65587}}
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = -2 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

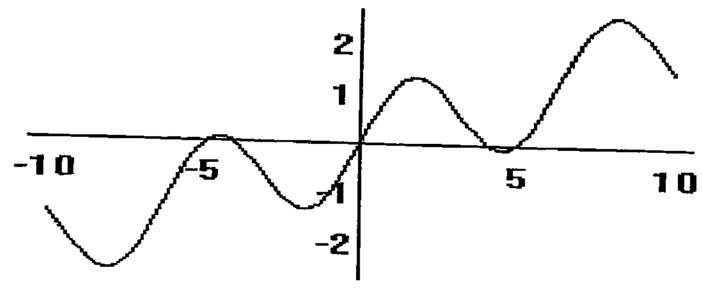
```
In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}]
Out[3]={-0.0450589, {x -> 0.905869}}
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = 1 اد القيمة الصغرى للدالة عندها

```
In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,.5}]
Out[4]= {1. , { - { x->9.54982  10^-13 }}
```

للبحث عن نقطةنهاية عظمى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = .5 إيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

```
In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]
```

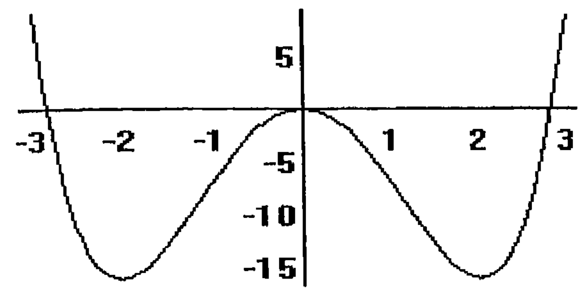


رسم الدالة
sin x + x/5
على الفترة [-10,10]
ونلاحظ أن الدالة لها اكثر من نقطة نهاية صغرىمحلية فى نطاق التعريف .

```
In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}]
Out[6]={-1.33423, {x -> -1.77215}}
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = 1 جاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[7]:= r3[x_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$r3(x) = x^4 - 8x^2$

ثم رسمها في الفـــــترة [-3 , 3]

ونلاحظ أن الدالة لها نقطتيى نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

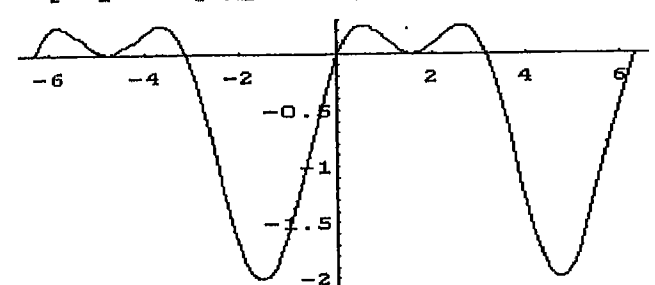
In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = 1.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

Out[8]={-16., {x -> 2.}}

In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالـــة بالقرب من النقطة x = -1 وفي النطاق [-2.5,0] وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

Out[9]={-16., {x ->- 2.}}

In[10]:= r4[x_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$

ثم رسمها في الفـــترة $[-2\pi, 2\pi]$

ونلاحظ أن الدالة لها اكثر من نقطة نهاية صغرىمحلية في نطاق التعريف .

In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالةr4[x]بالقرب من النقطة x = 6 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

Out[11]={-2., {x -> 4.71239}}

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}] للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالةr4[x] بالقرب من النقطة x = -3 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

Out[12]={-2., {x -> -1.5708}}

In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالةr4[x] بالقرب من النقطةx = -4وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها

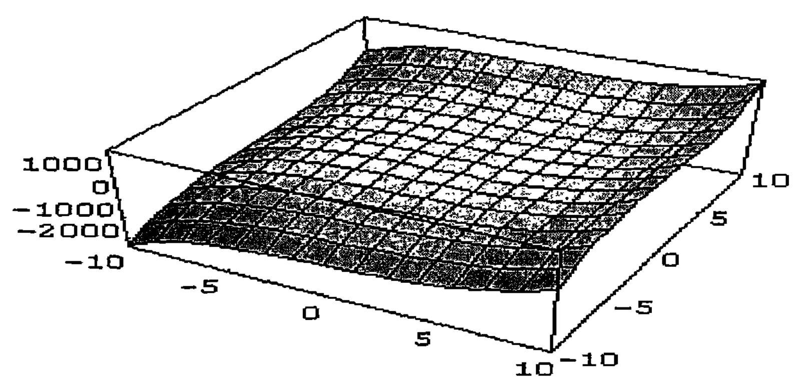
Out[13]={2.22045 10^{-16}, {x -> -4.71239}}

In[14]:=- FindMinimum[-r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةr4[x]بالقرب من النقطة x = -4 وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

Out[14]={0.25, {-(x -> -3.66519)}}



```
In[15]:= f[x_,y_]:=x^3+y^3-3x y; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]
```



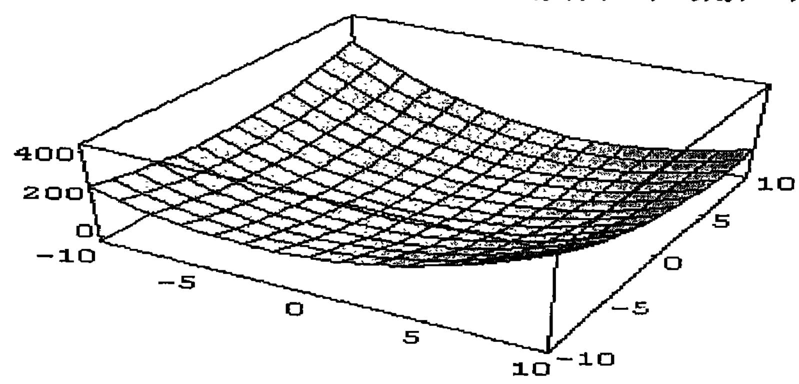
تعريف الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$$

```
In[16]:=FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}]
Out[16]={-1., {x -> 1., y -> 1.}}
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

```
In[17]:=h[x_,y_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]
```



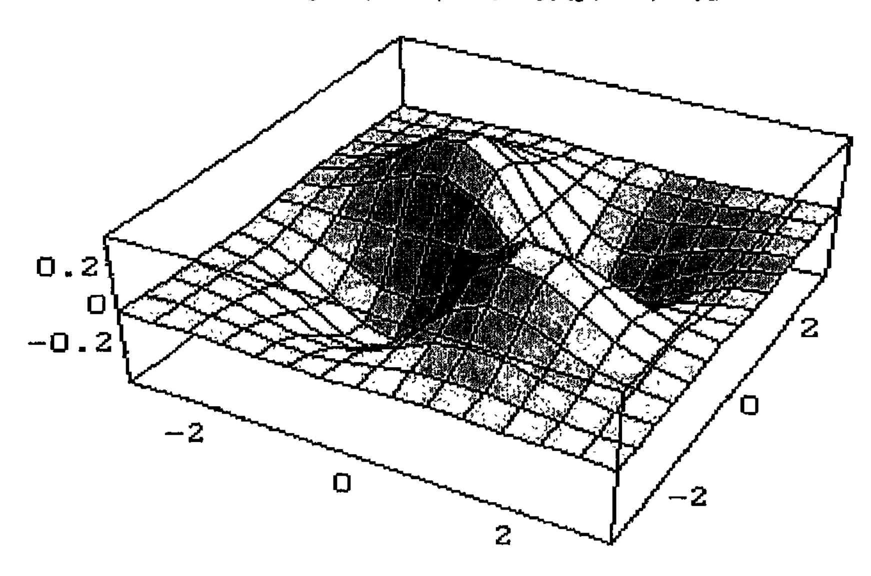
تعريف الدالة $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - x\,y - 7y$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$$

```
In[18]:=FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]
Out[18]={-14., {x -> 1., y -> 4.}}
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

```
In[19]:= g[x_,y_]:=-x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
         Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```



تعريف الدالة $g(x,y) =-x\ y\ Exp[-(x^2 + y^2)/2]$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$-\pi \leq x \leq \pi \quad , \quad -\pi \leq y \leq \pi$

In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من(0.6,0.5)وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها

Out[20]={-0.367879, {x -> 1., y -> 1.}}

In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةصغرى محليةللدالةبالقرب من (-1.5,-0.5) وإيجادالقيمةالصغرى للدالة عندها

Out[21]={-0.367879, {x -> -1., y ->-1.}}

In[22]:=-FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةبالقرب من(-1.5,0.5)وإيجادالقيمةالعظمىللدالةعندها

Out[22]={0.367879, {-(x -> -1.), -(y -> 1.)}}

In[23]:= -FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمىمحليةللدالةبالقرب من(1.5,-0.5)وإيجادالقيمةالعظمى للدالةعندها

Out[23]={0.367879, {-(x -> 1.), -(y ->-1.)}}

٤. الحســـــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

فى برنامج ماثيماتيكا أمر المجموع Sum[f, {i, imin,imax}] يقوم بحساب قيمـــة مضبوطة للمجموع $\sum_{i=imin}^{imax} f$ حتى إذا كان المجموع فى صورة رمزية symbolic وفى بعض الحالات لا يستطيع ماثيماتيكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالـــة Sum خاصـــة إذا كان imax = ∞ ولمثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجمـــــوع باستخدام الدالة N بالصورة

N[Sum[f, {i, imin,imax}] أو فى الصورة Sum[f,{i,imin,imax}]//N

وماثيماتيكا يقدم الأمر NSum لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة والتى تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد فى ماثيماتيكا الأمر NProduct لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{imax} f$	NSum[f, {i, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=imin}^{imax} f$	NSum[f, {i, imin, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=imin}^{imax} f$ من i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step	NSum[f, {i,imin, imax, step}]
إيجادقيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=imin}^{imax} \sum_{j=jmin}^{jmax} f$	NSum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, ...]
إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$	NProduct[f, {i, imin, imax}]

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

```
In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}]
Out[1]=Sum[i^-3 , {i, 1, Infinity}]
```

وعنـــد تطبيق الدالة N أمكن الحصول على قيمة عددية تقريبية للمجموع

```
In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]//N
Out[2]=1.20206
```

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع

```
In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}]
Out[3]=1.20206
```

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باســتخدام دالة Sum بالرغم من أن imax = 5 فقط

```
In[4]:=Sum[Exp[-n],{n,0,5}]
```

Out[4]=1 + E^{-5} + E^{-4} + E^{-3} + E^{-2} + E^{-1}

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عدديـــة تقريبية للمجموع حتى مالانهاية

```
In[5]:=NSum[Exp[-n],{n,0,Infinity}]
Out[5]=1.58198
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

```
In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]
Out[6]=2.71828
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

```
In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]
Out[7]=0.25
```

لإيجاد قيمةعددية تقريبيةلمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\frac{1}{i^2+j^2}$

```
In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]
Out[8]=2.39932
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5}\frac{1}{i^2}$

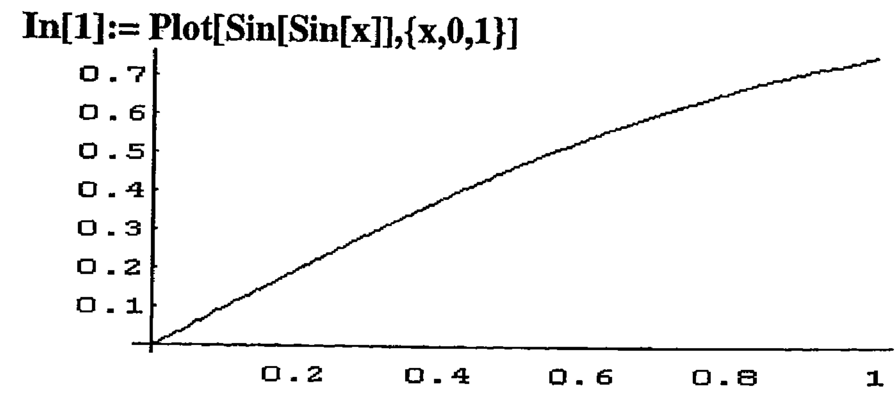
```
In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]
Out[9]=0.0000694444
```

٥ . التكــامل العــددى Numerical Integration

دالة التكامل **Integrate** تقوم بحساب التكامل $\int f(x)\,dx$ بصورة رمزية **symbolic** حيث يتعامل برنامج ماثيماتيكا مع دالة التكامل **f(x)** ويقوم بإجراء متتابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولا الى القيمة المضبوطة للتكامل فى صورة رمزية وتوجــد بعض الدوال لا تستطيع دالة **Integrate** الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحـــددة **definite** وفى هذه الحالة يمكن استخدام الدالة **N** لحساب قيمة عددية للتكامل ، وفـــى ماثيماتيكا يوجد الدالة **NIntegrate** لحساب قيمة عددية تقريبية للتكـــامل مباشـــرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متتابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقط خاصة فى نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم فى الوصول الى قيمة عددية تقريبية جيـــدة للتكامل .

N[Integrate[f,{x,xmin,xmax}]]	لحساب قيمة مضبوطة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ أولا ثم ايجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]	لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},...]	لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد $\int_{xmin}^{xmax}\int_{ymin}^{ymax} f(x,y)\,dx\,dy$
NIntegrate[f,{x,xmin,x1,x2,...,xmax}]	حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ مع مراعاة النقط الشاذة **x1,x2,...,** لدالة التكامل

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



In[2]:=Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

ماثيماتيكا لا يستطيع الحصول على قيمة مضبوطة للتكامل

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

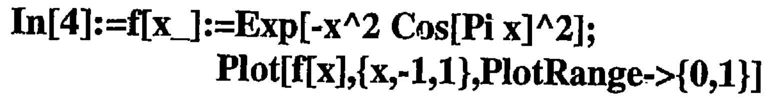
csa not found

$$\int_0^1 \sin(\sin(x))\,dx$$

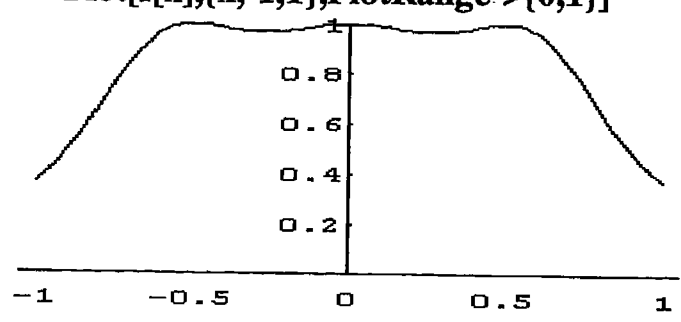
In[3]:=N[%]

Out[3]=0.430606

بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل



In[4]:=f[x_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];
Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

Out[5]=1.71167

لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2 \cos^2(\pi x)}\,dx$$

In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^\infty e^{-2x}\, dx$$

Out[6]=0.5

In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^3 \sqrt{4+x^3}\, dx$$

Out[7]=9.27972

In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}]

لإيجادقيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+\pi}\, dx$$

Out[8]=0.433785

In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$$

Out[9]=0.882081

In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-1}^1 \cos(x^2)\, dx$$

Out[10]=1.80905

In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}]

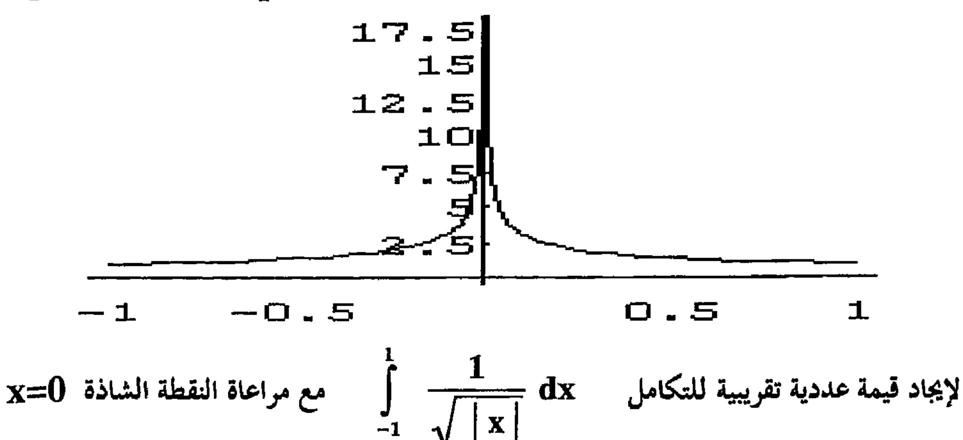
لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx$$

مع مراعاة النقطة الشاذة x=1

Out[11]=3.06006 - 2.70211 I

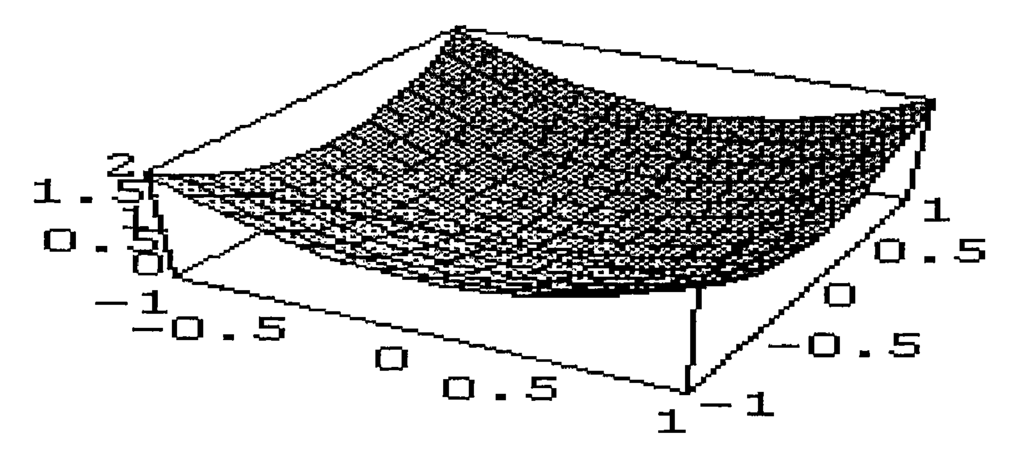
In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ مع مراعاة النقطة الشاذة **x=0**

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]
Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائى $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]
Out[15]=2.66667

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3} e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}}\,dx\,dy$$

In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]
Out[16]=2.48738

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} \left(2\,x^2 + y^2\right) dy\,dx$$

In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]
Out[17]=0.135714

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y+z} x\,y\,z\;\,dx\,dy\,dz$$

In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]
Out[18]=0.118056

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\,dz\,dx\,dy$$

In[19]:=NIntegrate[zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},
{z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}]

Out[19]=38.1704

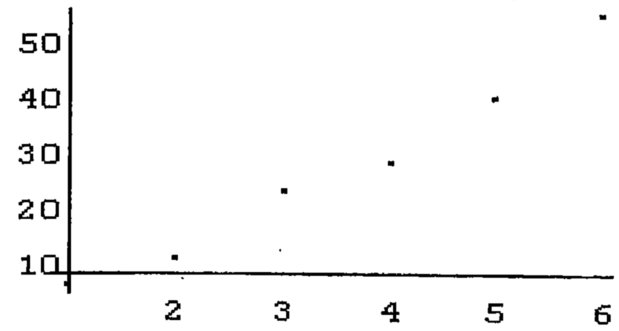
٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

فى داخل بناء ماثيماتيكا built-in يوجد إمكانات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التى تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التى يعتمد عليهـا ماثيماتيكـا لملائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التى نقوم بتحديدها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية مـن هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار $\sum_i |y_i - f_i|^2$ اصغر ما يمكن حيث y_i من البيانات المعطاة , f_i هى القيمة من التركيبة الخطية للدوال التى قام المستخدم بتحديدها ويتم ذلك باستخدام الدالة Fit والصيغة العامة لها كالآتي :

Fit[data,funs,vars]	ملائمة البيانات data باستخدام تركيبة خطية من الدوال funs فى المتغيرات vars
Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال f1 , f2,... تلائم النقط (1,y1),(2,y2),... حيث تم اعتبار قيم x المناظرة لقيم yi هى xi = i
Fit[{{x1,y1},{x2,y2},...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال f1,f2,... تلائم النقط (x1,y1),(x2,y2),...

Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]	إيجاد افضل خط مستقيم linear fit يلائم البيانات (1,y1),(2,y2), ...
Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية Quadratic fit تلائم البيانات (1,y1),(2,y2), ...
Fit[data,Table[x^i,{i,0,n},x],x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة n تلائم البيانات data

In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]



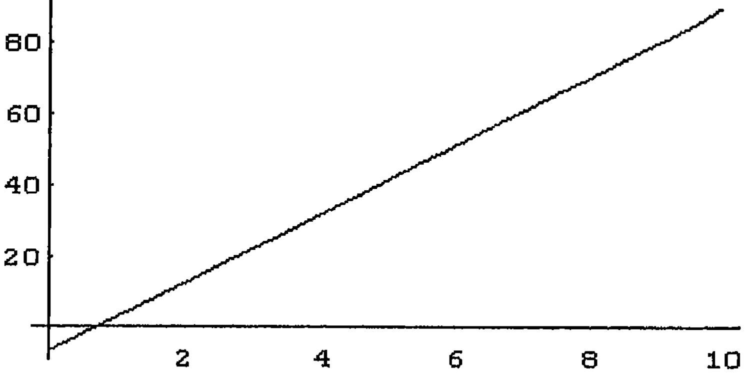
تعريف قائمة **data1** من الأعداد
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد
فى المستوى

In[2]:= f1=Fit[data1,{1,x},x]

Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x

إيجاد معادلة افضل خط مستقيم
يلائم قائمة البيانات **data1**

In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]



رسم الخط المستقيم **f1**
الناتج من الدالة **Fit**

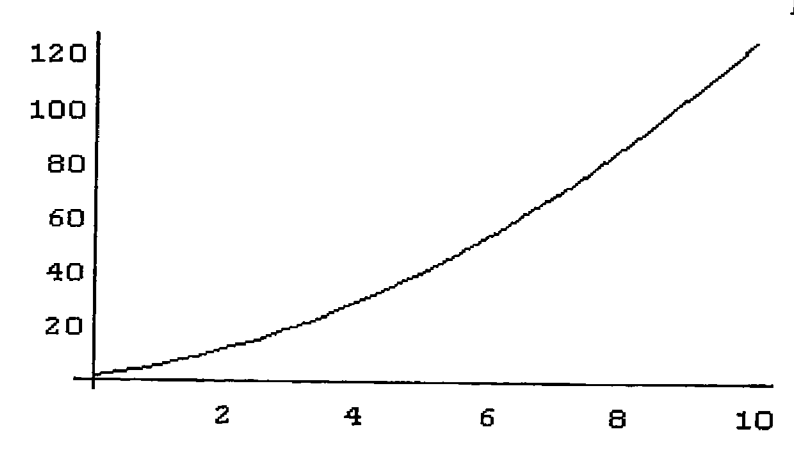
In[4]:=Show[s1,m1]

إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

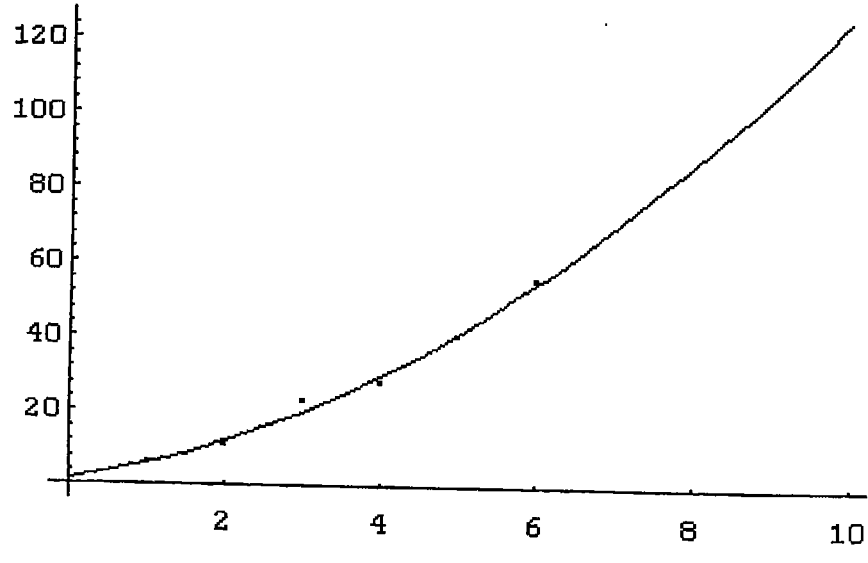
In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x] إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data1**

Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x^2

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}] رســـم كثيرة الحدود **f2** الناتجـة من الدالة **Fit**



In[7]:= Show[m1,s2]



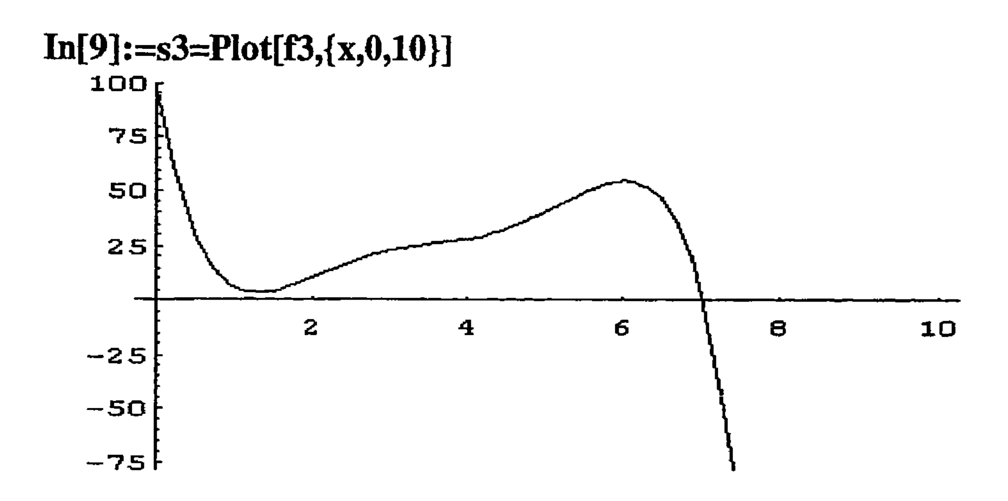
إظهار رسم كثيرة الحدود **s2** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**

إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات **data1** ثم رسم كثيرة الحدود **f3** الناتجة من الدالة **Fit**

In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]

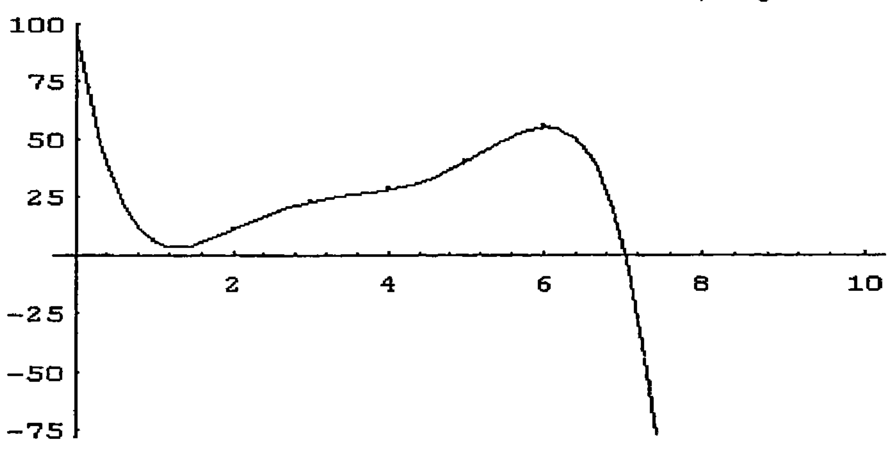
Out[8]= $96. - 194.533\,x + 144.583\,x^2 - 46.5833\,x^3 + 6.91667\,x^4 - 0.383333\,x^5$

In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]



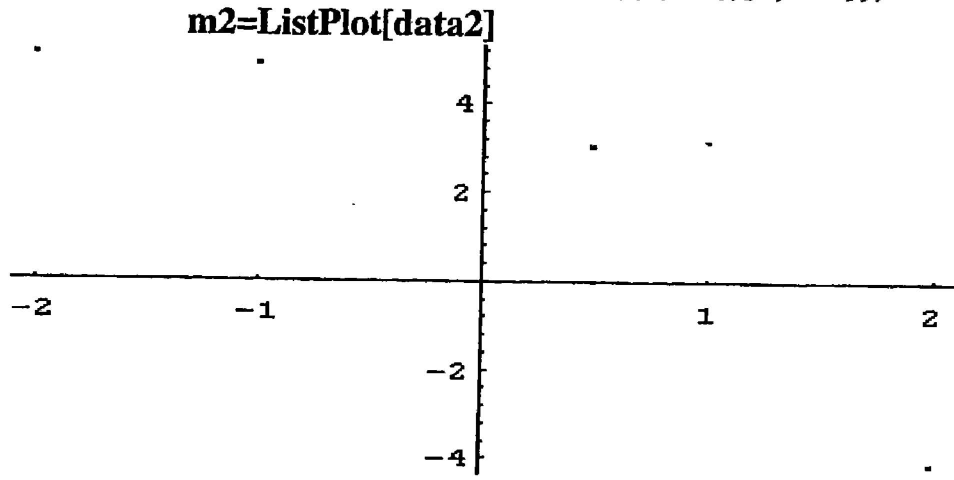
إظهار رسم كثيرة الحدود **s3** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**

In[10]:= Show[m1,s3]



تعريف قائمة **data2** من الأعداد ثم تحـــديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

```
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
         m2=ListPlot[data2]
```

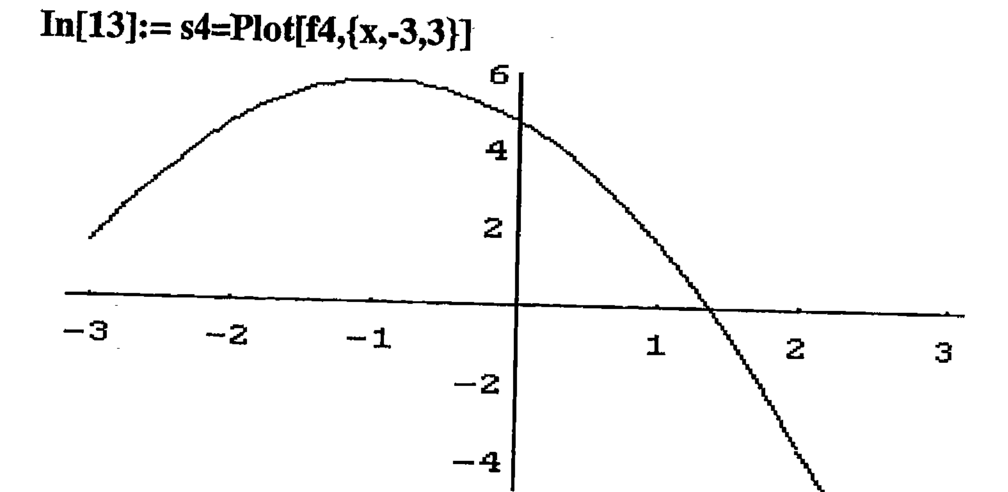


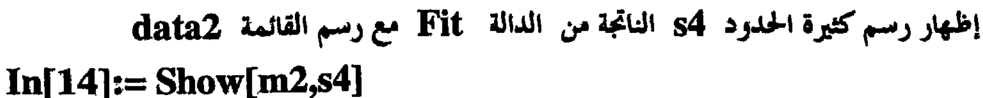
إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data2** ثم رســم كثـــيرة الحدود **f4** الناتجـــة من الدالة **Fit**

```
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
```

Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2

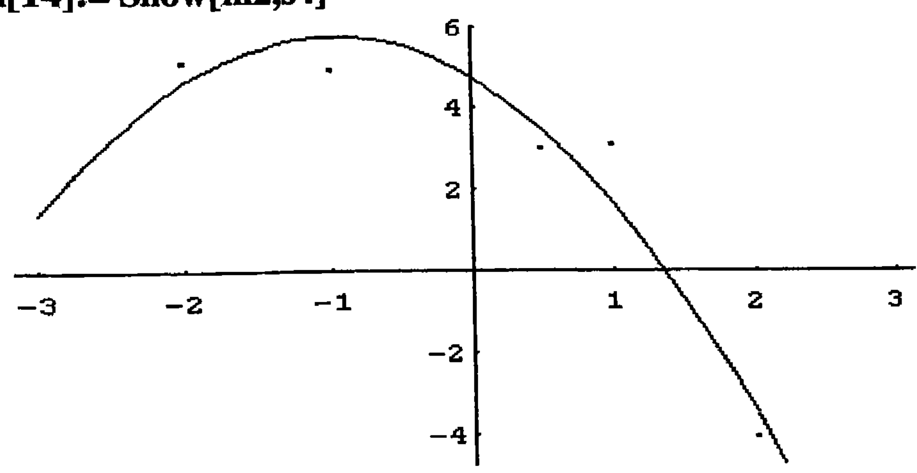
```
In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]
```





إظهار رسم كثيرة الحدود **s4** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data2**

In[14]:= Show[m2,s4]

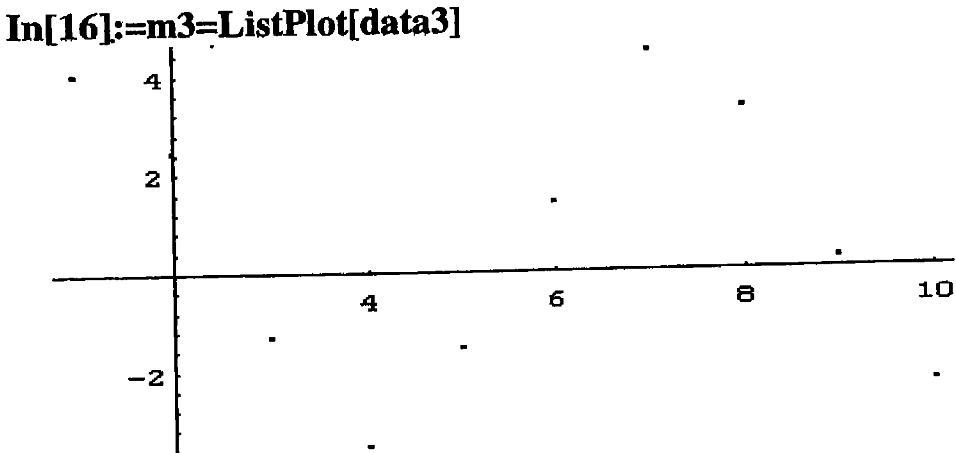


وتعتبر كثيرات الحدود هى الأكثر استخداما مع دالة **Fit** ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى فى قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة **data3** من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد فى المستوى

In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]
Out[15]={4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028, 1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}

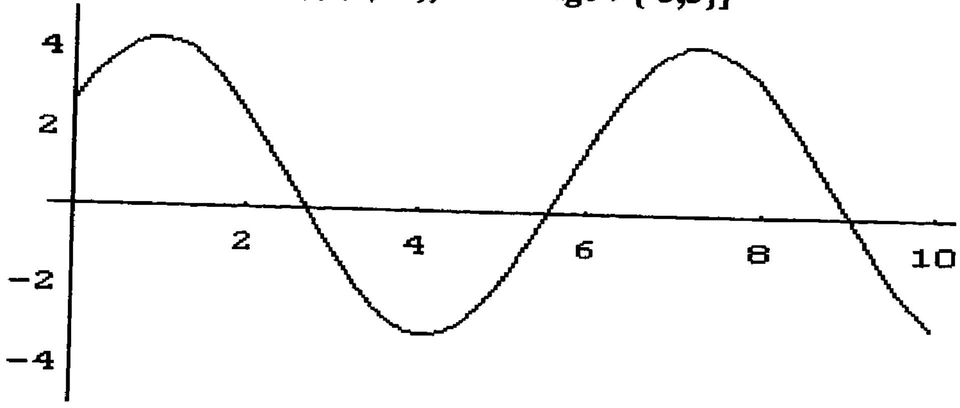
In[16]:=m3=ListPlot[data3]



إيجاد افضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال {1,Cos(x),Sin(x)} بحيث تلائم قائمة البيانات data3 ثم رسم المعادلة f5 الناتجة من الدالة Fit

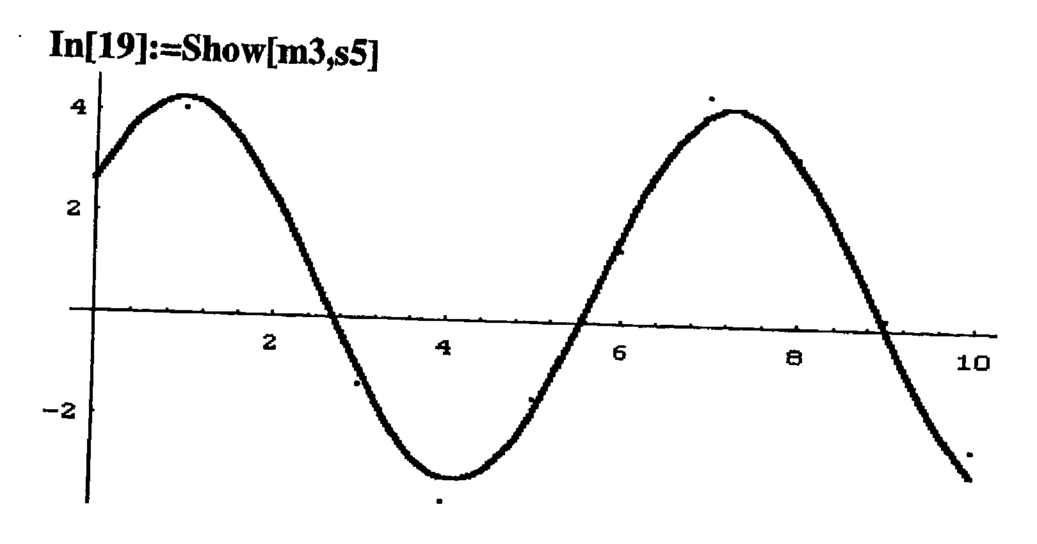
In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]
Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]

In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]

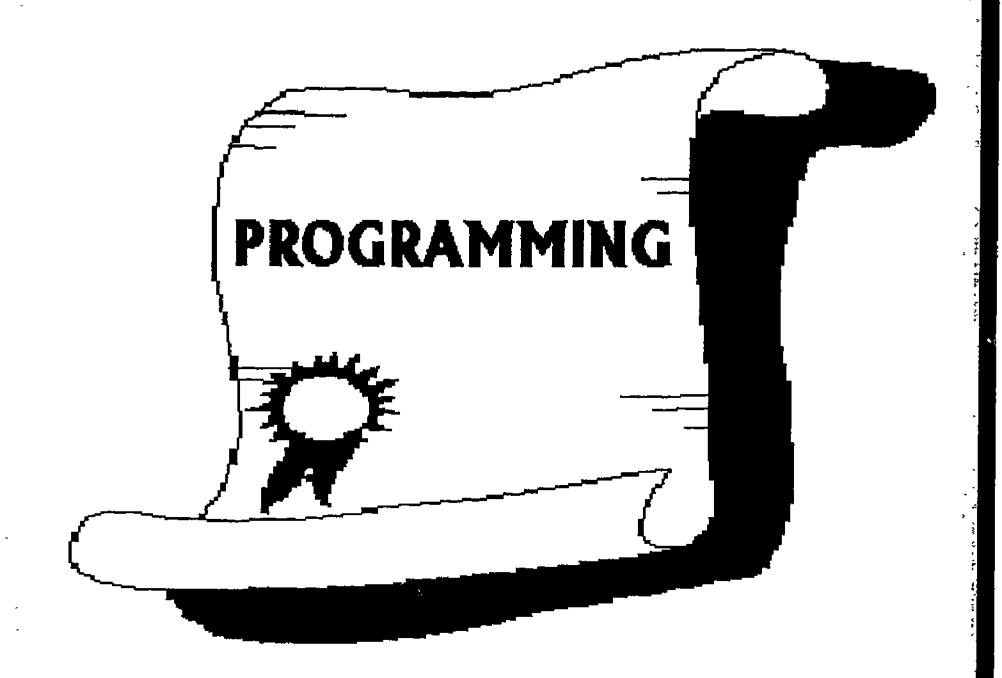


إظهار رسم المعادلة s5 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data3

In[19]:=Show[m3,s5]



الباب السابع
البرمجة فى ماثيماتيكا

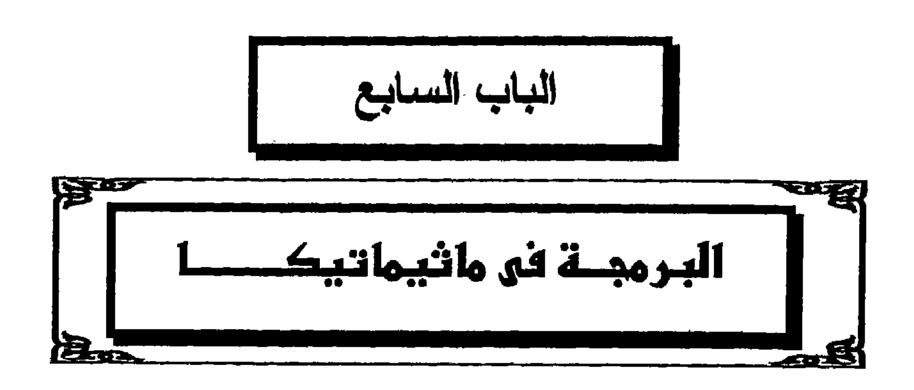


فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. منظومة الإجراءات **Procedure**

٢. الحلقات التكرارية **Loops**

٣. أوامر الانتقال المشـروط **Conditionals**



عند بناء الحسابات فى ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج أن نربط مجموعة الأوامر معا ويمكن أن يتم ذلك باستخدام منظومة إجراءات Procedure .

١ . منظومة الإجراءات Procedure

منظومة الإجراءات هى عبارة عن متتابعة من أوامر أو تعبيرات ماثيماتيكا بحيث يفصل بين كلا منها علامة الفصلة المنقوطة ; وقيمة التعبير الأخير فى المنظومة يمثل الناتج النهائى .

تعريف منظومة تتكون من مجموعة من الأوامر

Command1;Command2;...

```
In[1]:=r=(1+x)^2;r=Expand[r];r-1
```

Out[1]= $2x + x^2$

فى هذا المثـــال نلاحظ أن منظومة الإجراءات عبارة عن ثلاثة تعبيرات حســـابية يفصل كل منها عن الآخر بفصلة منقوطة كما نلاحظ أن الناتج النهائى هـــو قيمة التعبير الأخير (r - 1) فى منظومة الإجراءات .

ويمكن تعريف الدالة كمنظومة إجراءات
حيث نستخدم الأقواس ( ) لتوضيح
أن كل الإجراءات معا تمثل الدالة f

```
In[2]:= f[x_]:=(t=(1+x)^2;t=Expand[t])
```

لحساب قيمة الدالة f عند x=a

```
In[3]:= f[a]
```

Out[3]= $1+2a+a^2$

عند الاستعلام عن قيمة t نجد أن المتغير
t اصبح يمثل القيمة $1+2a+a^2$
ويحتفظ بها حتى بعد الخروج من المنظومة .

```
In[4]:= t
```

Out[4]= $1 + 2 a + a^2$

وفى كثير من الأحيان نحتاج الى أن نجعل المتغيرات المستخدمة داخل أى منظومة إجراءات كمتغيرات موضعية (Local) بمعنى أن هذه المتغيرات تحتفظ بالقيم داخل منظومة الإجـــراءات فقط ولكن تفقد هذه القيم بعد إنهاء الحسابات فى المنظومة والخروج منها ويتم عمل ذلك فـــى ماثيماتيكا باستخدام الأمر Block أو الأمر Module كالآتى :

للإعلان عن أن المتغيرات ...x,y, تمثل متغيرات موضعيـــة داخـــل منظومـــة الإجـــراءات **procedure** **Block[{x, y, ...}, procedure]** **Or** **Module[{x, y, ...}, procedure]**
تحديد القيم الابتدائية ... x = xo , y = yo, للمتغيرات الموضعية داخل منظومة الإجـــــراءات **procedure** **Block[{x=xo, y=yo, ...}, procedure]** **Or** **Module[{x = x0, y=yo, ...}, procedure]**

وبذلك فإنه بواسطة الأمر Block أو الأمر Module يمكن تعريف أى متغيرات داخل منظومة الإجراءات الواحدة دون التأثير على القيم بخارج المنظومة وبالتالى يمكن تعريف نفس المتغير الموضعى داخل اكثر من منظومة إجراءات .

عند استخدام الأمر Block فى تعريف الدالة g فان u يعامل كمتغير موضعى

```
In[5]:=
g[x_]:=Block[{u},u=(1+x)^2;u=Expand[u]]
```

لحساب قيمة الدالة g عند x = a

```
In[6]:= g[a]
Out[6]= 1 + 2a + a^2
```

عند الاستعلام عن قيمة u نلاحظ عدم وجود قيمة لأن u متغير موضعى

```
In[7]:=u
Out[7]=u
```

تعريف x=5 خارج المنظومة ثم استخدام الأمرModuleواعتبار أن x متغيرموضعى وطباعة قيمة عشوائية للمتغير x

```
In[8]:=x=5;
Module[{x},x=Random[];Print[x];]
Out[8]=0.863718
```

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن x = 5 وهى القيمة الموجودة خارج الأمر Module

```
In[9]:=?x
Out[9]=Global`x
x = 5
```

٢ . الحلقات التكرارية Loops

منظومة الإجراءات تسمح بتنفيذ مجموعة من تعبيرات ماثيماتيكا وفقا لترتيب هذه التعبيرات داخل منظومة الإجراءات وفى كثير من الأحيان نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات بصورة متكررة ويتم ذلك داخل ماثيماتيكا باستخدام أوامر خاصة بالحلقات المتكررة Loops حيث تعمل الحلقات المتكررة على تكرار مجموعة متتالية من الأوامر بصورة متكررة لعدد محدود من المرات مع إمكانية التغيير الأوتوماتيكى لقيم المتغيرات داخل الحلقات التكرارية ، ومن أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحلقات التكرارية هو الأمر Do والذى يستخدم بصورة مشابهة كما فى لغات البرمجة مثل فورتران FORTRAN والأمر Do له استخدامات متعددة وصيغته العامة موضحه بالجدول الآتى :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب قيمة expr عدد n من المرات	Do[expr,{n}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=1 الى i=imax بخطوة تساوى 1	Do[expr,{i,imax}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى 1	Do[expr,{i,imin,imax}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى istep	Do[expr,{i,imin,imax,istep}]
حساب قيمة expr لقيم i , j المعطاة	Do[expr,{i,imin,imax}, {j,jmin, jmax}]

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير t=2(1+t) ثلاث مرات حيث t=x

```
In[1]:=t=x;Do[t=2(1+t),{3}];t
Out[1]=2 (1 + 2 (1 + 2 (1 + x)))
```

في هذه الحلقة يتم طباعة m^2 لقيم m من 1 الى 3

```
In[2]:=Do[Print[m^2],{m,3}]
Out[2]= 1
        4
        9
```

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير $a = i^2 + 3j$ ثم طباعته لقيم i,j المعطاة

```
In[3]:=Do[a=I^2+3j;Print[a],{I,2},{j,I}]
Out[3]= 4
        7
        10
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن تكرار تطبيق نفس الدالة عدد محدود من المرات على تعبير معين باستخدام الأمر Nest كالآتي :

Nest[f,expr,n]	تطبيق الدالة f على التعبير expr لعدد n من المرات

حساب f (f (f (x)))

```
In[4]:=Nest[f,x,3]
Out[4]= f[f[f[x]]]
```

تعريف الدالة $f(x) = (x+1)^2$ ثم حساب f (f (x))

```
In[5]:=f[x_]=(x+1)^2;Nest[f,x,2]
Out[5]=(1 + (1 + x)^2 )^2
```

حساب f (f (1))

```
In[6]:= Nest[f,1,2]
Out[6]= 25
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن بناء الحلقات بحيث يتم إيقاف تنفيذ التكرار إذا لم يتحقق شرط معين وذلك باستخدام الأوامر **While , For** كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التى يقوم بها الأمر
For[start,test,step,body]	حساب قيمة **start** والتحقق من الشرط **test** لتنفيذ **body** مع تكرار إضافة **step**
While[test,body]	يتم تكرار تنفيذ **body** إذا كان الشرط **test** متحقق

حلقة باستخدام **For** حيث يتم البدء بقيمة **i=0** والتحقق من الشرط **$i<3$** لتنفيذ طباعة **i** مع إضافة **1** الى **i**

```
In[7]:=For[i=0,i<3,i=i+1,Print[i]]
Out[7]=
        0
        1
        2
```

تنفيذ الحلقة السابقة باستخدام **While**

```
In[8]:=i=0;While[i<3,Print[i];i=i+1]
Out[8]=
        0
        1
        2
```

وعند استخدام أوامر الحلقات فى ماثيماتيكا خاصة مع الأوامر While , For غالبـــا مـــا نحتاج الى تكرار تعديل قيم فى بعض المتغيرات المستخدمة داخل الحلقة ، وتوجد بعـــض الطـــرق المختصرة لأجراء مثل هذه التعديلات فى قيم المتغيرات والجدول الآتى يوضح ذلك .

معنى العملية المختصرة	العملية المختصرة
زيادة قيمة i بمقدار 1 فيمـــا يســـتجد مـــع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل i++	i++
نقصان قيمة i بمقدار 1 فيما يســـتجد مـــع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل i--	i--
زيادة قيمة i بمقدار 1 وجعل i هى القيمة الجديدة آي أن ++i تمثل i+1	++i
نقصان قيمة i بمقدار 1 وجعـــل i هـــى القيمة الجديدة آي أن --i تمثل i-1	--i
زيادة قيمة i بمقدار d آي أن i=i+d	i+ = d
نقصان قيمة i بمقدار d آي أن i=i-d	i- = d
ضرب x فى العدد c آي أن x = x * c	x*=c
قسمة x على العدد c آي أن x = x / c	x/=c
استبدال قيم x , y آي تغيير قيمة x لتصبح y وتغيير قيمة y لتصبح x	{x,y}={y,x}

فى هذا المثال يتم طباعة قيمة ++i وقيمة i
ونلاحظ أن قيمة ++i هى قيمة i قبل الزيادة

```
In[9]:=i=5;Print[i++];Print[i]
Out[9]=
        5
        6
```

فى هذا المثال يتم طباعة قيمة i++ وقيمة i
ونلاحظ أن قيمة i++ هى قيمة i بعد الزيادة

```
In[10]:=i=5;Print[++i];Print[i]
Out[10]=
        6
        6
```

فى هذه المنظومة تم وضع r=x ثم زيادة قيمة r
بمقدار 3y فتصبح قيمة r الجديدة x+3y

```
In[11]:=r=x;r+=3y;r
Out[11]=x + 3 y
```

استبدال قيم a , b

```
In[12]:=a=3;b=7;Print[{a,b}];
        {a,b}={b,a};Print[{a,b}]
Out[12]=
        {3, 7}
        {7, 3}
```

استبدال قيم x , y , z

```
In[13]:=x=1;y=2;z=3;Print[{x,y,z}];
        {x,y,z}={z,x,y};Print[{x,y,z}]
Out[13]=
        {1, 2, 3}
        {3, 1, 2}
```

```
In[14]:=For[i=1;t=x,i^2<10,i++,t=t^2+i;Print[t]]

Out[14]=
```

$1+x^2$

$2+(1+x^2)^2$

$3+(2+(1+x^2)^2)^2$

هذه الحلقة على الصورة For[start,test,step,body] حيث

start	i=1 ; t=x
test	i^2<10
step	i++
body	t=t^2+i ; Print[t]

٣ . أوامر الانتقال المشـروط Conditionals

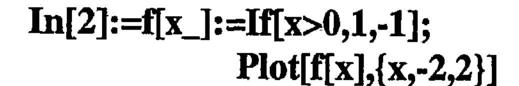
عند بناء منظومة الإجراءات Procedure فى ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات إذا تحقق شروط معينة ويتم ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام أوامـــر الانتقـــال المشـــروط الآتية :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
يتم تنفيذ then إذا كـــان test تحقـــق وخلاف ذلك يتم تنفيذ else	If[test,then,else]
إذا كان test تحقق يتم تنفيذ then وإذا كان test غير متحقـــق يتـــم تنفيـــذ else وخلاف ذلك يتم تنفيذ unknown	If[test,then,else,unknown]
يتم تنفيذ value المناظرة الى أول اختبــــار testi يتحقق	1,value1,test2,value 2, ...]

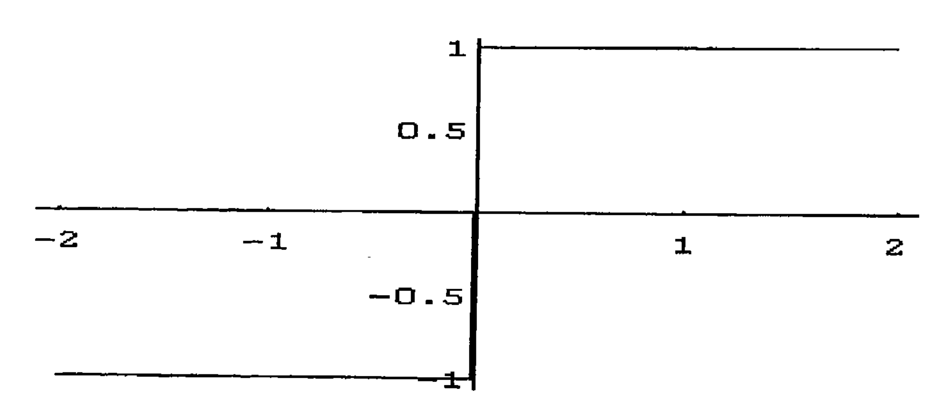
```
In[1]:= x=3;y=5;
        If[ x > y , Print[x] , Print[y] ]
Out[1]=
        5
```

إدخال قيم x , y ثم طباعة العدد الأكبر وقد تم استخدام أمر الانتقال المشروط If .
على الصورة If[test,then,else] حيث

test	x > y
then	Print[x]
else	Print[y]

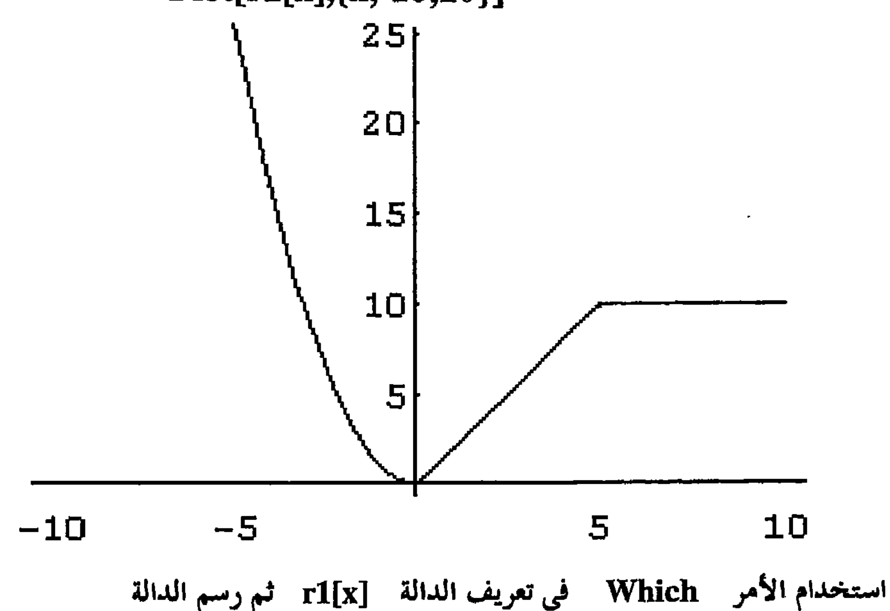


```
In[2]:=f[x_]:=If[x>0,1,-1];
            Plot[f[x],{x,-2,2}]
```



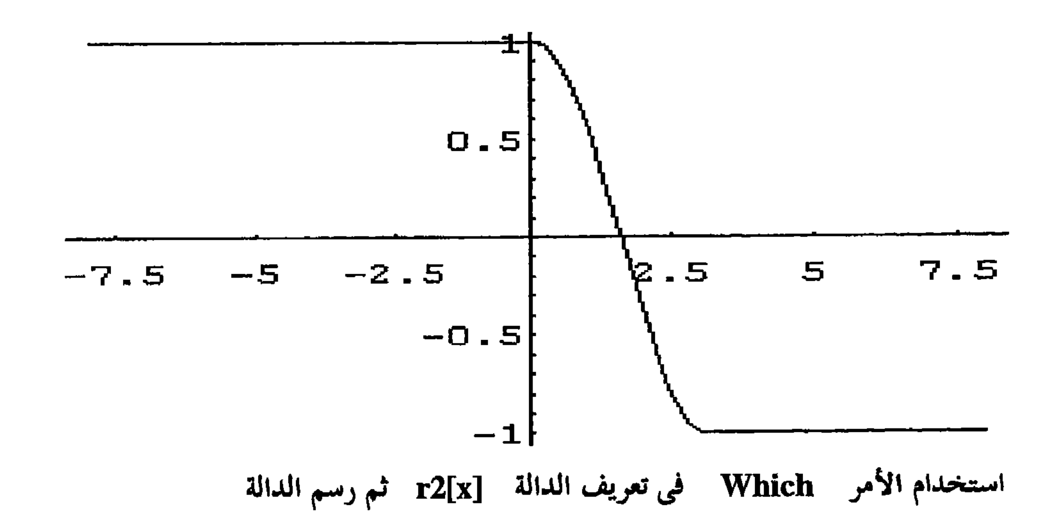
استخدام الأمر If في تعريف الدالة f[x] ثم رسم الدالة

```
In[3]:=r1[x_]:=Which[x<0,x^2,x>0 && x<5 ,2x,True,10];
        Plot[r1[x],{x,-10,10}]
```



استخدام الأمر Which فى تعريف الدالة r1[x] ثم رسم الدالة

```
In[4]:=r2[x_]:=Which[x<0,1,x<N[Pi],Cos[x],True ,-1];
        Plot[r2[x],{x,-8,8}]
```



استخدام الأمر Which فى تعريف الدالة r2[x] ثم رسم الدالة

منظومة تم فيها تعريف قائمة a من الأعـــداد الحقيقية ثم حســـاب وطباعـــة العدد الأصغر من القائمة

```
In[5]:=a={5,2,7,55,-4,9,3,10,-24,44,65,-21};mi=a[[1]];
      Do[If[mi>a[[i]],mi=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
      Print["Minimum of the list   a = ",mi]

Out[5]= Minimum of the list   a =  -24
```

منظومة تم فيها حســـاب وطباعـــة العـــدد الأكبر من القائمة a

```
In[6]:= ma=a[[1]];
      Do[If[ma<a[[i]],ma=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
      Print["Maximum of the list   a = ",ma]

Out[6]= Maximum of the list   a = 65
```

منظومة تم فيها حســـاب وطباعة العـــدد الأصغر والعدد الأكبر من القائمة a

```
In[7]:= mi=a[[1]];ma=a[[1]];
      Do[Which[mi>a[[i]],mi=a[[i]],ma<a[[i]],ma=a[[i]]];++i,
         {i,2,Length[a]-1}];
       Print["Minimum of the list a = ",mi];
       Print["Maximum of the list a = ",ma]

Out[7]= Minimum of the list a = -24
        Maximum of the list a = 65
```

وباستخدام الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا يمكن حساب

العدد الأصغر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة Min

والعدد الأكبر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة Max

```
In[8]:=Min[a]
Out[8]=-24

In[9]:=Max[a]
Out[9]=65
```

المراجـــع

[1] - Wolfram , Stephen
Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer ,
Second Edition , Addison Wesley , 1991 .

[2] - Wolfram , Stephen
Mathematica : The Student Book ,
Addison Wesley , 1994 .

[3] - Abell , Martha L . and Braselton, Tames P . ,
The Mathematica Handbook
Academic Press , 1992 .

[4] - Maeder , Roman ,
Programming in Mathematica ,
Addison Wesley , 1992 .

رقم الإيداع : ٢٠٠٠/٥٦١٦

مطابع الدار الهندسية ت : ٥٤٠٢٥٩٨

هذا الكتاب

برنامج ماثيماتيكا هو أحد برامج الكمبيوتر الهامة التى ظهرت حديثاً ، ويحتوى على العديد من الأوامر والدوال التى تغطى معظم الفروع الدقيقة فى الرياضيات .

ويقدم هذا الكتاب شرح تفصيلى لبرنامج ماثيماتيكا وكيفية التعامل مع الأوامر والدوال الخاصة به على الكمبيوتر والأستفادة المثلى منه فى حل المشاكل الرياضية المختلفة .

ويقدم الكتاب فى أسلوب مبسط بعيداً عن التعقيد كما يتضمن الجزء العملى الخاص بالتعرف على أوامر برامج ماثيماتيكا وتنفيذها على الكمبيوتر ، حيث يعرض العديد من الأمثلة التى تم تنفيذها على الكمبيوتر والتى تخدم مشاكل متعددة فى فروع الرياضيات المختلفة مثل التفاضل والتكامل ، والجبر ، والمعادلات التفاضلية والتحليل العددى ، كما يتضمن الكتاب العديد من التطبيقات للأوامر الخاصة برسم المنحنيات سواء فى المستوى أو الفراغ بالصورة الكرتيزية أو البرمترية ، كذلك حل أنظمة من المعادلات .

وهذا الكتاب موجه لدراسى الرياضيات والمهتمين بالكمبيوتر وتطبيقه فى مجال الرياضيات ، حيث يخدم الدارسين سواء فى المرحلة الثانوية أو الجامعية لطلاب قسم الرياضيات بكلية التربية أو العلوم أو كلية الهندسة .

والله ولى التوفيق ..،

الناشر

ISBN : 977-281-137-5

ACADEMIC BOOKSHOP

